Cvičení 1 - Logika a indukce (30.9.2024)

Úloha 1: Logické spojky 1

Doplňte tabulku hodnot.

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Úloha 2: Negace 1

Znegujte následující formule. Výsledná formule by měla obsahovat "$\neg$" jen vedle proměnných. Příklad: Negace $(a \vee b)$ je $(\neg a \wedge \neg b)$.

- Negace $(a \wedge b)$ je
- Negace $(a \Rightarrow b)$ je
- Negace $(a \Leftrightarrow b)$ je
- Negace $(\forall x \in A)[x < 3]$ je
- Negace $(\exists x \in A)[x = 2]$ je

Úloha 3: Negace 2

Znegujte následující nepravdivá tvrzení zapsaná v přirozeném jazyce. Můžete si pomoct přepisem pomocí logické formule.

- Pro všechna reálná čísla x je druhá odmocnina x nižší než x.
- Existuje prvočíslo, které je sudé a zároveň není rovno 2.
- Číslo je liché právě tehdy, když je dělitelné 2.

Úloha 4: Obměna

Obměnou implikace se rozumí přepis formule $(a \Rightarrow b)$ na $(\neg b \Rightarrow \neg a)$. Zformulujte obměnu následujících tvrzení:

- Pokud je x záporné, potom $\sqrt{x}$ není definovaná v $\mathbb{R}$.
- Pokud je množina omezená a uzavřená, potom je kompaktní.
- Pokud číslo má na místě jednotek nulu, potom je dělitelné dvěma a pěti.

Teoretický úvod do indukce

Předpokládejme, že chceme dokázat, že tvrzení obsahující proměnnou n platí, pokud za n dosadíme libovolné přirozené číslo.
Příkladem tvrzení může být:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Například pro $n = 5$ dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5+1)$$

což platí. Tvrzení jsme dokázali pro specifickou hodnotu n. Jak dokážeme, že tvrzení platí pro všech (potenciálně) nekonečně mnoho možných hodnot n? Metoda indukce spočívá v tom, že dokážeme dvě tvrzení:

- (Základ indukce) Tvrzení platí pro n=1. Neboli platí $V(1)$
- (Indukční krok) Pokud tvrzení platí pro libovolné n, potom platí i pro $(n+1)$. Neboli
$$(\forall n \in \mathbb{N})[V(n) \Rightarrow V(n+1)]$$

Proč důkaz indukcí funguje? Dejme tomu, že chceme dokázat $V(5)$, ale místo přímého dosazování do vzorce (jako výše) zvolíme důkaz indukcí. Na začátku dokážeme následující dvě tvrzení:

- $V(1)$
- $(\forall n \in \mathbb{N})[V(n) \Rightarrow V(n+1)]$

Nyní do druhého tvrzení dosadíme $n = 1$, což je možné díky univerzálnímu kvantifikátoru, a dostaneme $V(1) \Rightarrow V(2)$. Levá strana implikace platí díky prvnímu tvrzení. Z toho dostáváme, že platí i $V(2)$. Pokud toto samé opakujeme pro $n = 2$ a využijeme toho, že platí $V(2)$, dostaneme platnost $V(3)$. Opakováním tohoto postupu lze ukázat $V(5)$ i $V(1000)$ bez dosazování do vzorce se sumou.

Indukce nemusí začínat od 1 a indukční krok nemusí být (n+1). Pokud dokazujeme tvrzení jen pro sudá čísla, potom zvolíme základ 2 a krok (n+2). V některých případech je pro důkaz $V(n+1)$ třeba předpokládat platnost více tvrzení z $V(1)$ až $V(n)$. V těchto případech zformulujeme indukční krok například jako:

$$(\forall n \in \mathbb{N})[(V(1) \wedge V(2) \wedge \cdots \wedge V(n)) \Rightarrow V(n+1)]$$

Úloha 5: Praktický úvod do Indukce

V teoretickém úvodu bylo popsáno, jak pro všechna n dokázat platnost tvrzení $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$. Nyní to provedeme prakticky:

Začneme dosazením $n = 1$ do tvrzení a ověřením platnosti $V(1)$:

Nyní dosaíme n a $(n+1)$ do tvrzení, abychom dostali tvrzení $V(n)$ a $V(n+1)$. Jelikož v prvním případě dosazujeme n za n, tvrzení stačí opsat.

Všimneme si, že po dosazení vypadají tvrzení podobně. Nyní přepíšeme levou stranu $V(n+1)$ tak, aby měla tvar "levá strana $V(n)$ plus něco".

Využijeme platnosti indukčního předpokladu. Výraz "levá strana $V(n)$ plus něco" je rovný "pravá strana $V(n)$ plus něco".

Konečně, dokážeme to, že "pravá strana $V(n)$ plus něco" se rovná pravé straně $V(n+1)$.

Úloha 6: Indukce na matematických řadách

Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pomocí indukce. Pozor na $k = 2$ v poslední úloze.

- $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
- $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$

Úloha 7: Indukce a dělitelnost
Dokažte pro všechna $n \in \mathbb{N}$, že $(6n^2 + 2n)$ je dělitelné 4.

Fibonacciho posloupnost
Fibonacciho posloupnost je nekonečná posloupnost čísel definována jako:

- $F_1 := 1$
- $F_2 := 1$
- Pokud $n \geq 3$, potom $F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$

Všimněte si, v třetím případě že F_n je závislé na dvou předchozích členech. Toto se projeví v důkazech indukcí, které budou nyní mít strukturu

- $V(1)$ platí
- $V(2)$ platí
- $(\forall n \geq 3)[(V(n-2) \wedge V(n-1)) \Rightarrow V(n)]$ platí

Úloha 8: Vlastnosti Fibonacciho posloupnosti
Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pomocí indukce:

- $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

*** Úloha 9: Šachovnice**
Mějme šachovnici rozměru 2^nx2^n. Jedno z políček na této šachovnici chybí. Dokažte, že je tuto šachovnici možné pokrýt dílky, z nichž každý přikryje 3 políčka ve tvaru L.

* Úloha 10: Logické spojky 2

V úloze 1 byly představeny 4 binární logické spojky $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$. Pravdivostní tabulky těchto 4 spojek se vzájemně lišily. Jaký je nejvyšší možný počet binárních logických spojek, jejichž tabulky se vzájemně liší? K odpovědi lze dojít jak konstrukcí, tak úvahou.

* Úloha 11: Logické spojky 3

Definujte logické spojky $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ pomocí formulí využívající pouze spojky $\neg$ a $\wedge$.

* Úloha 12: Logické spojky 4

Definujte logické spojky $\neg$ a $\wedge$ pomocí formulí využívající pouze spojku $\uparrow$. Tato spojka se nazývá NAND ("not and") a její definice je v tabulce níže. Volitelně, zkuste vzorce, které jste vytvořili v předchozí úloze, rozepsat pomocí této spojky.

a	b	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

* Úloha 13: Princip indukce

Chcete dokázat platnost tvrzení pro všechna celá čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Navrhněte něco jako důkaz indukcí pro celá čísla a argumentujte o platnosti této metody. (Vaše metoda nemusí být univerzální, stejně jako první představená metoda nemohla dokázat platnost tvrzení o Fibonacciho řadě.)

** Úloha 14: Pascalův trojúhelník

Pro libovolné $n \geq k \geq 0$ definujme kombinační číslo $\binom{n}{k}$ následovně:

- Pro všechna $n \geq 0$ platí $\binom{n}{0} = 1$
- Pro všechna $n \geq 0$ platí $\binom{n}{n} = 1$
- Jinak $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Níže je tabulka obsahující hodnoty všech kombinačních čísel pro $n \leq 4$. Všimněte si, jak se pravidlo o součtu projevuje v tabulce.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Určete řádkové součty v tabulce výše. Jakou číselnou posloupnost tyto součty tvoří? Zformulujte tvrzení o řádkových součtech a dokažte indukcí.

** Úloha 15: Kombinatorická geometrie

Představte si dvourozměrnou rovinu.

- Do této roviny zakreslete první přímku. Rovina je touto přímkou rozdělena na 2 části.
- Do této roviny zakreslete druhou přímku. V závislosti na tom, jak byla tato přímka zakreslena, může být rovina rozdělena až na 4 části.
- Do této roviny zakreslete třetí přímku. Maximální počet částí je 7. (Přesvědčte se, že nelze rovinu takto rozdělit na 8 částí a zamyslete se proč.)

Počet částí je po zakreslení n přímek omezen zhora výrazem $(1 + \frac{1}{2}(n^2 + n))$. Dokažte toto tvrzení indukcí.