

Kombinatorika a grafy 1

MARIAN POLJAK¹

1 Bonusové úlohy - deadline 13.2.2022

Úloha 1. Zformulujte a dokažte variantu Ušatého lemma pro hranovou 2-souvislost. [2]

Úloha 2. Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu leží každý vrchol na nějaké kružnici. [1]

Úloha 3. Určete počet perfektních párování v úplném bipartitním grafu $K_{n,n}$, ve kterém odstraníme n disjunktních hran. [2]

Úloha 4. V USA mají mince těchto typů: 1, 5, 10, 25, 50 centy a \$1. Nalezněte vytvořující funkci $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde a_i je počet způsobů, kolika se dá americkými mincemi zaplatit i centů. [1]

Úloha 5. (*) Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme permanent matice A jako

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

(a) Bud' G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a necht' $a_{ij} = 1$ pokud $\{i, j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\text{per}(A)$, kde $A = (a_{ij})$. [3]

(b) Necht' $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojité stochastická matice). Ukažte, že $\text{per}(A) > 0$. [4]

Úloha 6. Eukleidovská Ramseyova teorie.

(a) Uvažme obarvení bodů roviny \mathbb{R}^2 třemi barvami. Ukažte, že potom vždy dokážeme nalézt dva body stejné barvy ve vzdálenosti 1. [2]

(b) Ukažte, že existuje 2-obarvení bodů roviny, ve kterém není jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranami jednotkové délky. [2]

¹Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.