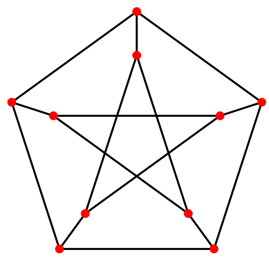
# Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 8. cvičení (24.11.2021)[1]

## 1 Osvěžení

**Úloha 1.1.** Perfektní párování grafu $G$ *je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu* $G$*. Najděte všechna perfektní párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje. [4]*



## 2 Aplikace Hallovy věty

*Vrcholovým pokrytím* v grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $e \in E$ platí $e \cap C \neq \emptyset$. *Párováním* v $G$ je množina disjunktních hran z $E$.

**Věta 2.1.** *V každém bipartitním grafu se velikost minimálního vrcholového pokrytí rovná velikosti maximálního párování.*

Nechť $X$ a $I$ jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na* $X$ nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

**Věta 2.2.** *Systém různých reprezentantů v* $\mathcal{M}$ *existuje právě tehdy, když pro každou* $J \subseteq I$ *je* $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$*; tato podmínka se nazývá Hallova.*

**Úloha 2.3.** *Nechť* $a, b, c, d, e$ *jsou různá přirozená čísla.*

*(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny* $\{a, b, c, d\}$ *systém různých reprezentantů?*

*(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny* $\{a, b, c, d, e\}$ *systém různých reprezentantů?*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

**Úloha 2.4.** *Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu.*

**Úloha 2.5.** Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ *je matice typu* $\{1, \dots, n\}^{k \times n}$, *kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.* Latinský čtverec řádu $n$ *je latinský obdélník řádu* $n \times n$.

*Ukažte, že latinských čtverců řádu $n$ je alespoň* $\Omega((n!)^2)$.

**Úloha 2.6.** *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné $k$-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň $k$ prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

**Úloha 2.7** (*). *Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme* permanent matice $A$ *jako*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

*(a) Buď $G$ bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v $G$ je* $\mathrm{per}(A)$, *kde* $A = (a_{ij})$.

*(b) Nechť $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv.* dvojitě stochastická matice*). Ukažte, že* $\mathrm{per}(A) > 0$.

## 3 Osmý domácí úkol - deadline 1.12.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz*.

**Úloha 3.1.** *Rozhodněte, zda má následující množinový systém $\mathcal{M} = (M_i : i \in I = \{20, \dots, 30\})$, kde $M_i \subseteq X = \{1, \dots, 11\}$ je množina dělitelů čísla $i$, systém různých reprezentantů. Existuje systém různých reprezentantů v množinovém systému $\mathcal{M}'$, který vznikne z $\mathcal{M}$ nahrazením $M_{23}$ za $M_{32}$? [4]*

**Úloha 3.2.** *Odvoďte Hallovu větu z Kőnigovy-Egerváryho věty. [4]*