Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 7. cvičení (10.11.2021)[1]

1 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z).$$

Řezem nazveme podmnožinu E, po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

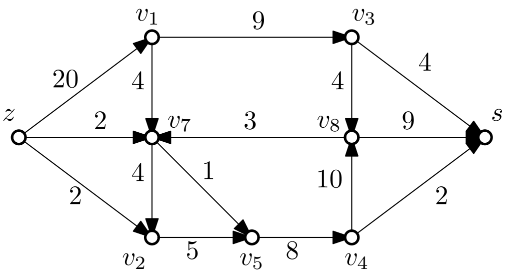
Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P. Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

Algorithm 1.1: Ford–Fulkerson(G)

$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do $\begin{cases} \epsilon_P \leftarrow \min_{e\in E(P)} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)). \end{cases}$
Vrať tok f.

Úloha 1.1. *Najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem tok maximální velikosti v následující síti. Nalezněte také řez minimální kapacity a ověřte tak, že daný tok má skutečně maximální velikost.*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.



Úloha 1.2. *(a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.*

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Úloha 1.3. *Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?*

Úloha 1.4. *Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.*

Úloha 1.5. *Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.*

2 Sedmý domácí úkol - deadline (posunutý o týden, 17. 11. cviko není) 24.11.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 2.1. *Uvažujme orientovaný graf Q_n n-dimenzionální krychle, jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici, přičemž jsou orientované z vrcholů s k jedničkami do vrcholů s $k+1$ jedničkami pro všechna $k = 0, \ldots, n-1$. Na grafu Q_n uvažujme síť se zdrojem $z = (0, 0, \ldots, 0)$ a stokem $s = (1, 1, \ldots, 1)$, kde všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Sestrojte:*

(a) celočíselný maximální tok, [2]

(b) maximální tok, který je na všech hranách kladný. [4]

Nezapomeňte dokázat, že nalezené toky jsou skutečně toky a že mají maximální velikost.