Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 5. cvičení (27.10.2021)[1]

1 Vytvořující funkce — naposledy

Vytvořující (generující) funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$.

Úloha 1.1. *Vyjádřete členy a_n, které jsou zadány následujícími rekurencemi.*

(a) $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ *pro každé* $n \geq 0$, *přičemž* $a_0 = 1$ *a* $a_1 = 2$,

(b) $a_n = \frac{a_0+\cdots+a_{n-1}}{n}$ *pro každé* $n \geq 2$, *přičemž* $a_0 = 1$ *a* $a_1 = 2$,

(c) $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ *pro každé* $n \geq 0$, *přičemž* $a_0 = 2$ *a* $a_1 = 4$.

Úloha 1.2. *Najděte explicitní vzorce rekurencí:*

(a) $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ *a* $b_{n+2} = -b_n + 2b_{n+1}$ *pro* $n \geq 0$,

(b) $c_0 = 1$ *a* $c_{n+1} = 7c_n + 6^{n+1}$ *pro* $n \geq 0$.

Úloha 1.3. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.*

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$.

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme poprvé *do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí*

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích).

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Úloha 1.4 (*). *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C s přirozenými čísly takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne jako součet dvou standardních šestistěnných hracích kostkek?*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

2 Pátý domácí úkol - deadline (posunutý o týden) 10.11.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 2.1. Korektní uzávorkování *s* $n \in \mathbb{N}_0$ *páry závorek je buď prázdná posloupnost závorek, nebo výraz tvaru* $(U_1)U_2$*, kde* U_1 *a* U_2 *jsou korektní uzávorkování. Máme tak například 5 korektních uzávorkování se třemi páry závorek:* $()()()$, $()(())$, $(()())$, $(())()$ *a* $((()))$.

Nalezněte bijekci mezi korektními uzávorkováními s n páry závorek a mezi zakořeněnými binárními stromy s n vrcholy. (Nezapomeňte formálně dokázat, že se jedná o bijekci). Podle věty z přednášky pak budeme vědět, že počet korektních uzávorkování s n *páry závorek se rovná* n*-tému Catalanovu číslu* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. ***[6]***