Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 4. cvičení (20.10.2021)[1]

1 Vytvořující funkce — aplikace

Vytvořující (generující) funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$.

Úloha 1.1. *Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má vytvořující funkci $g(x)$. Jakou vytvořující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$?*

Úloha 1.2. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(1, 3, 5, 7, \ldots)$,

(b) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(c) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$, *tedy n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel.*

Tvrzení 1.3 (Zobecněná binomická věta)**.** *Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí*

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Úloha 1.4. *Určete koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q.*

(a) *u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$,*

(b) *u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,*

(c) *u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.*

Tvrzení 1.5 (Rozklad na parciální zlomky)**.** *Uvažujme podíl polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde búno (jinak to můžeme snadno částečně vydělit) q má vyšší stupeň než p a má rozklad*

$$q(x) = (x-a_1)^{n_1} \ldots (x-a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \ldots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}.$$

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

Pak můžeme zmíněný podíl rozložit na součet tzv. parciálních zlomků*, kde za každý člen* $(x-a_i)^{n_i}$ *v rozkladu* q *budou členy* $\frac{A_{i,1}}{x-a_i}+\ldots+\frac{A_{i,n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}$ *a za každý člen* $(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}$ *budou členy* $\frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{x^2+\alpha_i x+\beta_i}+\ldots+\frac{B_{i,m_i}x+C_{i,m_i}}{(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}}$. *Koeficienty* A, B, C *se dají jednoznačně určit pomocí řešení systému lineárních rovnic, který vyplývá z rozkladu.*

Úloha 1.6. *Určete koeficient*

(a) *u* x^{10} *v* $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) *u* x^{2019} *v* $\sin(x)$.

Úloha 1.7. *Najděte explicitní vzorce rekurencí:*

(a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ *a* $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$ *pro* $n \geq 0$,

(b) $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ *a* $b_{n+2} = -b_n + 2b_{n+1}$ *pro* $n \geq 0$,

(c) $c_0 = 1$ *a* $c_{n+1} = 7c_n + 6^{n+1}$ *pro* $n \geq 0$.

Úloha 1.8. *Kolika způsoby lze číslo* $n \in \mathbb{N}$ *zapsat jako součet* k *nenulových celých čísel, jestliže záleží na jejich pořadí?*

Úloha 1.9. *Uvažme náhodnou procházku v* $\mathbb{Z}$ *začínající v počátku, kde se v každém kroku* $n = 1, 2, \ldots$ *rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.*

(a) *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *určete pravděpodobnost* u_{2n} *jevu, že se po* $2n$ *krocích se vrátíme do počátku.*

(b) *Určete vytvořující funkci* $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$.

(c) *Nechť pro* $n \in \mathbb{N}$ *je* f_{2n} *pravděpodobnost jevu, že se po* $2n$ *krocích se vrátíme* poprvé *do počátku. Dokažte, že pro* $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ *a* $u_0 = 1$ *platí*

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

(d) *Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ *a její koeficienty* f_{2n} *(a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po* $2n$ *krocích).*

(e) *Ukažte, že suma* $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ *konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.*

Úloha 1.10 (*). *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky* B *a* C *s přirozenými čísly takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je pravděpodobnost, že na* B *a* C *padne dohromady přesně* n, *stejná jako pravděpodobnost, že* n *padne jako součet dvou standardních šestistěnných hracích kostkek?*

2 Čtvrtý domácí úkol - deadline 27.10.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz*.

Úloha 2.1. *Určete koeficient u x^n ve výrazu $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$. [3]*

Úloha 2.2. *Pro dané přirozené k sestrojte vytvořující funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je rovno pravděpodobnosti, že při hodu k klasickými šestistěnnými kostkami padne v součtu n. [3]*

3 Taháky na vytvořující funkce

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Popis	Posloupnost	Vytvořující funkce	Kompaktní tvar
Základní řada	$(1, 1, 1, 1, \dots)$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$\frac{1}{1-x}$
Měníme koeficient	$(1, 2, 4, 8, \dots)$	$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$	$\frac{1}{1-2x}$
Měníme mocninu	$(1, 0, 1, 0, \dots)$	$1 + x^2 + x^4 + \dots$	$\frac{1}{1-x^2}$
Posouváme změněný koeficient doprava o 2	$(0, 0, 1, 2, 4, 8, \dots)$	$x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + \dots$	$\frac{x^2}{1-2x}$
Derivujeme základ	$(1, 2, 3, 4, \dots)$	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
Posouváme derivaci o 1 doleva	$(2, 3, 4, 5, \dots)$	$2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 \dots$	$\frac{\frac{1}{(1-x)^2}-1}{x}$
Derivujeme základ 2x	$(2, 6, 12, 20, \dots)$	$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots$	$\frac{2}{(1-x)^3}$