Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 3. cvičení (13.10.2021)[1]

1 Osvěžení

Seřaďte podle velikosti pro velké n tyto funkce

$$(\log n)^{n \log n} \quad (n \log n)^{\log n} \quad (\sqrt{n})^n \quad n^{\sqrt{n}}$$

a své rozhodnutí podložte důkazem. [4]

2 Vytvořující funkce

Úloha 2.1. *(a) Mějme polynomy $p(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ a $q(x) = 1+x^2+x^4+x^6$. Jaký je koeficient u členu x^7 v jejich součinu $p(x)q(x)$?*

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramù. Kolika zpùsoby mùžeme maximálně naplnit tašku?

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení 2.2. *Buď $(a_0, a_1, \ldots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n. Potom pro každé $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \ldots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Úloha 2.3. *Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má generující funkci $g(x)$. Jakou generující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$?*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

Úloha 2.4. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$, *tedy n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.*

Úloha 2.5. *Určete koeficient*

(a) *u* x^{10} *v* $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) *u* x^{2019} *v* $\sin(x)$.

Úloha 2.6. *Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.*

Úloha 2.7. *Kolika způsoby lze číslo $n \in \mathbb{N}$ zapsat jako součet k nenulových celých čísel, jestliže záleží na jejich pořadí?*

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Popis	Posloupnost	Vytvořující funkce	Kompaktní tvar
Základní řada	$(1, 1, 1, 1, \dots)$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$\frac{1}{1-x}$
Měníme koeficient	$(1, 2, 4, 8, \dots)$	$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$	$\frac{1}{1-2x}$
Měníme mocninu	$(1, 0, 1, 0, \dots)$	$1 + x^2 + x^4 + \dots$	$\frac{1}{1-x^2}$
Posouváme změněný koeficient doprava o 2	$(0, 0, 1, 2, 4, 8, \dots)$	$x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + \dots$	$\frac{x^2}{1-2x}$
Derivujeme základ	$(1, 2, 3, 4, \dots)$	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
Posouváme derivaci o 1 doleva	$(2, 3, 4, 5, \dots)$	$2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 \dots$	$\frac{\frac{1}{(1-x)^2}-1}{x}$
Derivujeme základ 2x	$(2, 6, 12, 20, \dots)$	$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots$	$\frac{2}{(1-x)^3}$

3 Třetí domácí úkol - deadline 20.10.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud jste to dosud neudělali, uveďte přezdívku, pod kterou budete uvedeni na stránkách předmětu. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 3.1. *Sestrojte vytvořující funkce pro tyto posloupnosti (v kompaktním tvaru, tj. bez použití nekonečných řad).*

(a) $(6, 0, 0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, ..., 6, 0, 0, ...)$ ***[1]***

(b) $(9, 27, 81, ..., 3^i, ...)$ ***[2]***

(c) $(0, 1, 1, 2, 2, 4, 3, 8, 4, 16, ..., i, 2^i, ...)$ ***[3]***