Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 2. cvičení (06.10.2021)[1] [2]

1 Tahák na odhady

1.1 Faktoriál

- Hrubý odhad: $n^{n/2} \leq n! \leq (\frac{n+1}{2})^n \leq n^n$
- Lepší odhad: $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$ (z $1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$)
- Stirlingův odhad: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

1.2 Kombinační čísla

- Odhady pro obecné kombinační číslo: $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$, $\binom{n}{k} \leq n^k$
- Hrubý odhad pro největší binomický koeficient: $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$
- Lepší odhad pro největší binomický koeficient: $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$
- Stirlingův odhad pro největší binomický koeficient: $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$

2 Osvěžení

Rozhodněte (a podpořte argumenty), zda-li platí:

1. $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = \Theta(n^{3/2})$ **[1]**
2. Součin všech prvočísel p, $m + 1 \leq p \leq 2m$, je nejvýš 2^{2m} **[1]**
3. $\sum_{i=1}^{m} \binom{2i}{i} = 2^{2m-1}$ **[1]**
4. Funkce $(\ln n)^{\ln n}$ roste rychleji než $n2^{\ln \ln n}$ **[1]**

3 Odhady

Úloha 3.1. *Rozhodni, zda platí:*

(a) $n! = 2^{O(n)}$

(b) $n^2 + 5n \log n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

[2] Rozhraní pro odevzdávání DÚ je na kam.mff.cuni.cz/owl/c/zs2122/kg1-mp, token je 0f56f6f1a76a

(c) $n^{\ln n} = 2^{\Omega(n)}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$

Úloha 3.2. *Rozhodni, zda existují kladné a neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$ definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo $f(n) = O(g(n))$, ani $g(n) = O(f(n))$.*

Úloha 3.3. *Uvažme náhodnou procházku, kde se v každém kroku $i = 1, 2, \ldots$ rozhodneme z přípustných směrů náhodně uniformně nezávisle.*

(a) *Úpravou postupu z přednášky pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ odhadněte střední hodnotu počtu návratů do počátku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Je tato hodnota shora omezená?*

(b) *(*) Odhadněte střední hodnotu počtu návratů do počátku pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

4 Druhý domácí úkol - deadline 13.10.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím submitněte na sovičku, viz druhý footnote. Prosím o submit i v případě, že mi řešení odevzdáte papírově na začátku cvičení, abych to tam mohl případně okomentovat. Pokud jste to dosud neudělali, uveďte přezdívku, pod kterou budete uvedeni na stránkách předmětu. Jsou-li nějaké nejasnosti, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 4.1. *Definujme funkci počítající počet prvočísel menších rovných x následovně:*

$$\pi(x) := |\{p \leq x \mid p \text{ je prvočíslo}\}|.$$

Dokažte, že $\pi(x) \in O(\frac{x}{\log x})$. Hint: Použijte (platné) tvrzení 2. ze sekce Osvěžení, tj. že součin všech prvočísel p, $m + 1 \leq p \leq 2m$, je nejvýš 2^{2m}. ***[6]***

Poznámka 4.2. *S využitím pár výpočetních triků pro dělitelnost prvočísly jde dokázat i dolní odhad $\pi(x) \in \Omega(\frac{x}{\log x})$, dohromady tedy s použitím elementárních tvrzení dovedeme $\pi(x) \in \Theta(\frac{x}{\log x})$. To už je "téměř" známý vztah[3] $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.*

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function