Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 12. cvičení (22.12.2021)[1]

1 Ramseyova teorie, grafy a hypergrafy

Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme *k-obarvením* množiny X libovolnou funkci $f\colon X \to C$, kde C je množina *k barev*. Pro $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ definujme *Ramseyovo číslo* $R(n_1, \ldots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i-tou barvou.

Ramseyova věta pro grafy. *Pro každé $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R(n_1, \ldots, n_k)$ konečné.*

Z přednášky také víme, že $R(3,3) = 6$ a $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy $H_1, \ldots, H_k$ jako $R(H_1, \ldots, H_k)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i-tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R(H_1, \ldots, H_k) \leq R(|V(H_1)|, \ldots, |V(H_k)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Rozšiřme se nyní o hypergrafy! Pro $p, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ definujme *Ramseyovo číslo* $R_p(n_1, \ldots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení množiny $\binom{\{1,\ldots,N\}}{p}$ existuje $i \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje podmnožinu $X \subseteq \{1, \ldots, N\}$ velikosti n_i se všemi p-ticemi z $\binom{X}{p}$ obarvenými i-tou barvou.

Ramseyova věta pro hypergrafy. *Pro každé $p, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_p(n_1, \ldots, n_k)$ konečné.*

Ramseyova věta platí dokonce i v následující nekonečné verzi.

Ramseyova věta pro nekonečné hyper-množiny. *Pro každé $p, k \in \mathbb{N}$ a pro každé k-obarvení množiny $\binom{\mathbb{N}}{p}$ existuje nekonečná $X \subseteq \mathbb{N}$ taková, že všechny její p-tice mají v daném k-obarvení stejnou barvu.*

Úloha 1.1. *Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3. Neboli určete $R(K_3, K_{1,3})$.[4]*

Úloha 1.2. *Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:*

(a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.

---

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

(c) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.*

(d) *Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.*

Úloha 1.3 (IMO 1964/4)**.** *Each of 17 students talked with every other student. They all talked about three different topics. Each pair of students talked about one topic. Prove that there are three students that talked about the same topic among themselves. In other words, prove that $R(3,3,3) \leq 17$.*

Úloha 1.4. *Dokažte nerovnost $R(3,\ldots,3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$ pro Ramseyovo číslo $R(3,\ldots,3)$ s k barvami.*

Úloha 1.5 (Erdős-Szekeres lemma)**.** *In a sequence of $(m-1)(n-1)+1$ pairwise distinct real numbers, there is either an increasing subsequence of length m or a decreasing subsequence of length n.*

Úloha 1.6. *Prove that if each point of the plane is colored red or blue then some rectangle has its vertices all the same color.*

Úloha 1.7 (IMO 1978/6)**.** *An international society has its members from six different countries. The list of members has 1978 names, numbered 1, 2, …, 1978. Prove that there is at least one member whose number is the sum of the numbers of two members from his own country, or twice the number of a member from his own country.*

Úloha 1.8. *(Schurova věta) Ukažte, že existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N]$ r barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y = z$ (tj. najdeme jednobarevné řešení této rovnice).*

Hint: Zvolte $N = R(3,..,3) - 1$ (trojka r-krát) a vhodný hranově 2-obarvený graf.

Úloha 1.9 (Fermat's Last Theorem modulo p)**.** *Prove that for all $n > 2$ and large enough (you can choose how large) primes p the following congruence has a solution:*

$$a^n + b^n \equiv c^n \pmod{p}.$$

Úloha 1.10. (a) *Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $M(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.*

(b) *Sestrojte libovolně velkou $\{0,1\}$-matici, která neobsahuje 2×2 matici se samými jedničkami a ani 2×2 matici se samými nulami jako* diagonální podmatici. *Matice A o rozměrech $n \times n$ je diagonální podmaticí matice B o rozměrech $N \times N$, pokud existuje $R \subseteq \{1,\ldots,N\}$, $|R| = n$, taková, že vybráním řádků a sloupců matice B s indexy z R získáme matici A.*

(c) *Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.*

2 Dvanáctý domácí úkol - deadline 5. 1. 2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 2.1. *Ukažte, že* $R(C_4, C_4) = 6$*, tedy že v každém červeno-modrém obarvení hran* K_6 *najdeme jednobarevný* 4*-cyklus, zatímco na* K_5 *se to už podařit nemusí. (Lze udělit částečné body za slabší odhady.)* ***[6]***