Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 11. cvičení (15.12.2021)

1 Osvěžení - Kombagrový Náboj

Úloha 1. *Dokažte*

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Úloha 2. *Na dětském táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?*

Úloha 3. *Dokažte*

$$\sum_{k=d}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

Úloha 4. *Označme* $\mathbb{S}_n$ *systém všech permutací* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *čísel 1 až n. Pro permutaci* $p \in \mathbb{S}_n$ *označme*

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i.$$

Ukažte, že

$$4\sum_{p\in\mathbb{S}_n} f(p) = (n^2+n)(n+1)!$$

Úloha 5. *Dokažte*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Úloha 6. *Určete koeficient u* x^4 *v* $\frac{8+13x}{(1+2x)(1-x)}$.

Úloha 7. *V matematické olympiádě řešilo 45 účastníků šest příkladů, každý příklad byl vyřešen právě 25 řešiteli. Ukažte, že můžeme vybrat dva účastníky, kteří dohromady vyřešili vše.*

Úloha 8. *Najděte explicitní vzorec pro rekurenci* $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, *kde* $a_1 = 1, a_0 = 0$.

Úloha 9. *Po písemce z analýzy část studentů zamířila do nemocnice na transplantaci krve. Krevní skupina všech studentů je AB, A, B, nebo 0, přičemž 0 je univerzální dárce, zatímco AB je univerzální příjemce, dále A dovede darovat/přijímat od A, B dovede také darovat/přijímat od B.*

Předpokládejte, že znáte pro každou krevní skupinu počty všech studentů této skupiny. Dále znáte množství každé krevní skupiny, kterou má naskladněna nemocnice.

Je možné, aby se transplantace u všech povedla a na každého se dostalo, kdyby bylo potřeba $37 * A$, $33 * B$, $40 * 0$, $40 * AB$, *a nemocnice měla naskladněno* $44 * A$, $31 * B$, $42 * 0$, $38 * AB$*? Modelujte problém jako problém hledání maximálního toku.*

Úloha 10. *Když slepíme tři rovnostranné trojúhelníčky podél některých hran, dostaneme něco, co můžeme považovat za graf na pěti vrcholech. Kolik má tento graf koster?*

Úloha 11. *Definujte zcela korektně a přesně konečnou projektivní rovinu, vysvětlete, proč jsou různé části definice potřeba.*

Úloha 12. *Nalezněte kladné a neklesající funkce* $f(n)$ *a* $g(n)$ *definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo* $f(n) = O(g(n))$ *a ani* $g(n) = O(f(n))$.

Úloha 13. *Ukažte, že*

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n+1-i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Úloha 14. *Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.*

Úloha 15. *Pole mřížky* 21×21 *jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.*

Úloha 16. *Mějme rovinné nakreslení grafu* G*, ve kterém jsou všechny stěny (i ta vnější) trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy* G *jsou obarveny třemi barvami (ne nutně korektně, tj. sousední vrcholy mohou mít stejnou barvu. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Úloha 17. *Ukažte, že každý graf s* N *vrcholy neobsahující žádné cykly délky přesně* 4 *má nanejvýš* $O(N^{3/2})$ *hran. Hint: Dvěma způsoby odhadněte počty podgrafů* $K_{1,2}$ *a použijte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.*

2 Jedenáctý domácí úkol - deadline 5.1.2022, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha. *Na univerzitě studuje 2000 studentů a 2000 studentek. Předpokládejme, že nikdo z těchto 4000 studujících není zapsán ve stu nebo více klubech. Na druhou stranu je známo, že libovolný student se s kteroukoli studentkou může potkat v nějakém klubu, kde jsou oba zapsáni. Rozhodněte, zda-li je možné, aby všechny kluby měly buď nejvýše 10 chlapců či nejvýše 10 dívek, nebo zda nutně existuje alespoň jeden klub, ve kterém je zapsáno alespoň 11 chlapců a zároveň alespoň 11 dívek. [8]*