Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 10. cvičení (08.12.2021)[1]

1 Počty koster

Kostra v grafu $G = (V, E)$ je stromem $T = (V, E')$ s $E' \subseteq E$. Neboli T je souvislým podgrafem grafu G na stejné množině vrcholů a T navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf G označme jako $\kappa(G)$ počet koster grafu G.

Cayleyho vzorec. *Pro každé celé číslo $n \geq 2$ je počet koster úplného grafu K_n na n vrcholech roven n^{n-2}. Neboli $\kappa(K_n) = n^{n-2}$.*

Laplacián grafu $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ je $n \times n$ matice $L(G) = (L_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, kde

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg_G(i), & \text{pokud } i = j, \\ -1, & \text{pokud } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta. *Pro každý graf $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ platí $\kappa(G) = \det(L(G)^{1,1})$, kde $L(G)^{1,1}$ značí matici $L(G)$ bez prvního řádku a bez prvního sloupce.*

Z přednášky také víme, že počet koster úplného grafu K_n bez jedné hrany je roven $(n-2)n^{n-3}$ a počet koster úplného grafu K_n obsahujících pevně zvolenou hranu je $2n^{n-3}$.

Úloha 1.1. *Spočtěte počet koster v následujících grafech:*

(a) $K_n \div e$, tedy grafu K_n s jednou podrozdělenou hranou e,

(b) $K_n \div E$, tedy grafu K_n se všemi hranami podrozdělenými,

(c) $C_m \oplus_e C_n$, tedy dvou cyklů slepených společnou hranou e,

(d) $C_m \oplus K_n$.

Úloha 1.2. *Spočtěte počet koster úplného grafu K_n za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

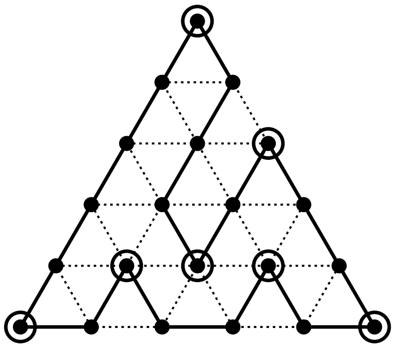
Úloha 1.3. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{n,m}$ za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

Úloha 1.4. *Spočtěte počet koster grafu, který vznikne slepením úplných grafů K_n a K_m přes společnou hranu.*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.

Úloha 1.5. *Mějme matici A o rozměrech $n \times n$ takovou, že $A_{i,j} = ij$. Spočtěte dvěma způsoby součet všech jejích prvků a dokažte tím vzorec $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.*

Úloha 1.6. *Rovnostranný trojúhelník o straně délky n je vyplněný jednotkovou trojúhelníčkovou mřížkou. Uzavřená lomená čára vede podél této mřížky a každý vrchol mřížky potká právě jednou. Dokažte, že tato čára alespoň $(n+1)$-krát zahne do ostrého úhlu.*



2 Desátý domácí úkol - deadline 22.12.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení prosím buď submitněte na sovičku (elektronicky), nebo doneste osobně na cvičení. Pokud submitnete na Sovičku, máte šanci mít své řešení opraveno mnou ještě před finálním obodováním. Jsou-li nějaké nejasnosti, problémy, můžu-li nějak pomoct, pište na *marian@kam.mff.cuni.cz.*

Úloha 2.1. *Mějme graf G na $2n \geq 6$ vrcholech, vzniklý z disjunktního sjednocení dvou úplných grafů K_n, prvního na $v_1, \ldots, v_n$ a druhého na $v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$, přidáním dvou hran $\{v_1, v_{n+1}\}$ a $\{v_2, v_{n+2}\}$. Určete počet koster grafu G. Kolik koster dostaneme pro $n = 3$? **[6]***