Kombinatorika a grafy 1

Marian Poljak - 1. cvičení (29.9.2021)[1]

1 Počítání a kombinační čísla

Úloha 1.1. *Dokaž (stačí nahlédnutím), že platí:*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

(c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

(d) $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Úloha 1.2. *Máme postavit 2D zeď o výšce a šířce $n, m \leq 5000$. Můžeme použít lego bloky o rozměrech 1×1, 1×2, 1×3 a 1×4, které můžeme pokládat jen horizontálně. Požadujeme, aby zeď neměla žádné díry a navíc byla "celistvá", tj. nedala se rozdělit na dvě užší zdi podél žádné vertikály. Navrhni efektivní algoritmus, který dovede spočítat počet takových zdí.*[2]

2 Odhady

Úloha 2.1. *Seřaď následující výrazy podle rychlosti jejich asymptotického růstu (tj. pro opravdu velké hodnoty n):*

$$2^{2n} \quad \binom{2n}{n} \quad e^{\ln^3 n} \quad n^{\ln n} \quad (\sqrt{n})^n$$

Úloha 2.2. *Rozhodni, zda platí:*

(a) $n! = 2^{O(n)}$

(b) $n^2 + 5n \log n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$

(c) $n^{\ln n} = 2^{\Omega(n)}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$

Úloha 2.3. *Rozhodni, zda existují kladné a neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$ definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo $f(n) = O(g(n))$, ani $g(n) = O(f(n))$.*

[1] Informace o cvičení najdeš na kam.mff.cuni.cz/~marian/2122/KG1.
[2] Lze najít a vyřešit na hackerrank.com/challenges/lego-blocks.

3 První domácí úkol - deadline 06.10.2021, 15:40

Úlohy smíte řešit samostatně či ve dvojici, sepsat úlohu však musí každý samostatně. Řešení zasílejte mně na *marian@kam.mff.cuni.cz* či doneste osobně na začátek dalšího cvičení. Ke svému prvnímu odevzdanému úkolu si dejte kromě jména i přezdívku, pod kterou budete uvedeni na stránkách předmětu.

Úloha 3.1. *Seřaďte následující výrazy podle velikosti pro velké n, svá rozhodnutí zdůvodněte: [4]*

$$\binom{2n}{n-1} \quad \binom{2n}{n} \quad \binom{2n}{10} \quad n! \quad n^{\sqrt{n}} \quad n^{15} \quad n^{\log n} \quad (\log n)^n \quad \log(n^n) \quad 2^n$$

Úloha 3.2. *Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$. Připomínám, že $f(n) \in \Theta(g(n))$ značí asymptotickou rovnost, tj. že existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ a n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ máme $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$. [2]*

4 Dodatek (řešení 2.1)

Řešení. Pro dostatečně velké n platí:

$$n^{\ln n} \leq e^{\ln^3 n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n} \leq (\sqrt{n})^n$$

První nerovnost je jasná z $e^{\ln^3 n} = n^{\ln^2 n}$. Pro druhou a třetí nerovnost nám pomůže odhad plynoucí z rozkladu binomické věty, $\frac{2^{2n}}{4n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$. Třetí nerovnost je tím přímo dokázána, pro důkaz druhé ještě musíme dodat:

$$e^{\ln^3 n} \leq \frac{2^{2n}}{4n+1}$$

$$(4n+1) \cdot n^{\ln^2 n} \leq 2^{2n}$$

$$2^{\log_2(4n+1)} \cdot \left(2^{\log_2 n}\right)^{\ln^2 n} \leq 2^{2n}$$

$$2^{(\log_2 n)\cdot(\ln^2 n)+\log_2(4n+1)} \leq 2^{2n}$$

To již zřejmě platí, protože pro velké n, součin logaritmů v levém exponentu nepřekoná lineární funkci v exponentu napravo (note, platí $\log_2 n = \frac{\ln n}{\ln 2}$). Můžeme podotknout, že by samozřejmě vyšlo totéž i za použití silnějšího odhadu

$$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$$

nebo dokonce přesného $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ vyplývajícího ze Stirlingovy formule.

Zbývá poslední čtvrtá nerovnost, jejíž platnost je vidět po zlogaritmování dvojkovým logaritmem (to můžeme, jelikož je to rostoucí funkce). Vyjde $2n = \log_2 2^{2n} \leq \log_2 (\sqrt{n})^n = \log_2 n^{n/2} = \frac{n}{2} \log_2 n$, což pro velké n zřejmě platí.

□