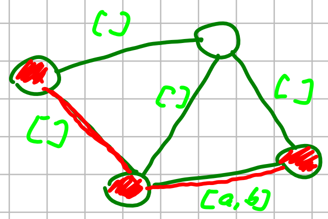
Fractional Cascading [Chazelle, Guibas 1986]



Df: Katalogový graf $G=(V,E)$. ← neorientovaný; multi

Pro $u\in V$: C_u := katalog ve vrcholu u, uhlesající seznam $\{-\infty,+\infty\}\subseteq C_u$

Pro $e\in E$: R_e := interval přiřazený hraně, pokud $R_{uv}=[a,b]$, pak $a,b\in C_u\cap C_v$ ← definice kopie ta každý interval s danými kraj. bodem

Df: Lokální stupeň $\mathrm{ldeg}(u) := \max_{x\in\mathcal{U}} (\#\text{hran } uv : x\in R_{uv})$

Předpokládáme: $\forall u\ \mathrm{ldeg}(u)\le d$

Parametry:
$n := |V|$
$m := |E|$ $\qquad n,m\in O(s)$
$s := \sum_u |C_u|$
d $\qquad t :=$ # vrcholů v dotazu

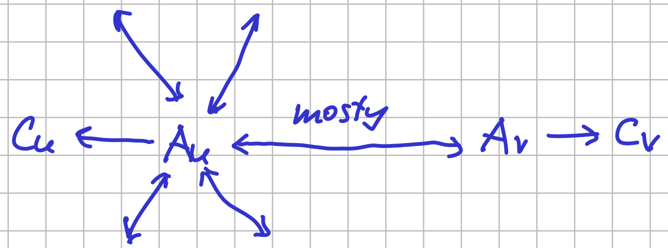
Dotaz: $x\in\mathcal{U}$, zobecněná cesta: $v_1 — v_t \in V$
t.ž. $\forall i>1\ \exists j<i : v_jv_i\in E\ \&\ x\in R_{v_jv_i}$
↑ může být adaptivně online

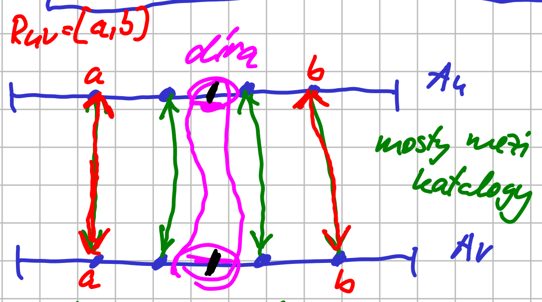
Odpověď: $\forall i$ pozice x v C_{v_i}

Chceme složitost:

	Build	Space	Query
1	$O(d\cdot s)$	$O(s)$	$O(\log s + t\cdot d)$
2	$O(s)$	$O(s)$	$O(\log s + t\cdot \log d)$

$\forall u\in V$ C_u doplním na A_u (augmented catalog)





žádné 2 mosty nemají společný prvek

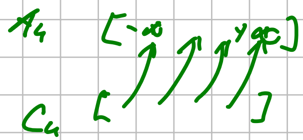
Invariant: Neexistuje díra větší než $6d-1$.

Reprezentace: prvek si pamatuje:
$\in A_u$
- hodnota $\in\mathcal{U}$
- odkaz do C_u (nejbližší následník)
- předchozí / další v A_u
- flag (tmp)

pro konce mostu:
- odkaz na hranu
- odkaz na protější konec
- odkaz na předchozí most v A_u pro stejnou hranu
- count = velikost díry vlevo od mostu
- rank (tmp) $\qquad$ na břehu u

Odpověď na dotaz
- najdu x v A_{v_1} $\quad O(\log s)$
  → dohledám v C_{v_1} $O(1)$
- krok po hraně v_iv_{i+1} $\quad O(d)$
  → pozice v $A_{v_{i+1}}$
  ⇓
  pozice v $C_{v_{i+1}}$

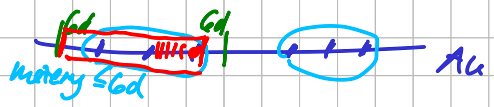
KONSTRUKCE Insert prvku do A_u na známou pozici



1. samotné vložení: vznikne 1 nový prvek
2. přepočítání countů ← seznam nových prvků
3. rozdělení velkých děr novými mosty

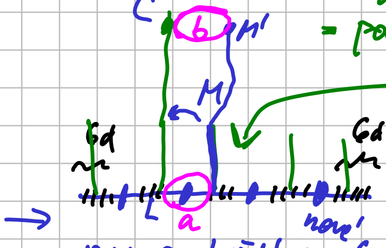
→ seznam velkých děr

② Přepočet countů



- nové prvky rozdělíme na clustery
  - ⓐ každý nový prvek: flag=1 pro něj + 6d doleva } → cluster = 6d před je souvislá posl. označených
  - ⓑ Pro každý nový: pokud flag=1: najdu kraje clusteru, zpracuji cluster, nastavím flag=0 uvnitř clusteru

trvá $O(d \cdot \#\text{nových prvků})$



r++ za každý prvek

Narazím-li na most M:

M.rank ← r
L ← M. sousední vlevo
Pokud L.rank > 0:
  a ← r − L.rank
  M' ← M. protější
  b ← M'.count
σ ← a+b je dolní odhad velikosti díry
  Pokud σ ≥ 6d & M.count + b < 6d:
    přidám M do seznamu velkých děr
M.count ← σ

! průběžně nulujeme ranky.

Tvrdíme:
- Po doběhnutí ② jsou všechny county správně & každá velká díra je právě 1x v seznamu velkých děr.
- ② trvá $O(d \cdot \#\text{nových prvků})$

---

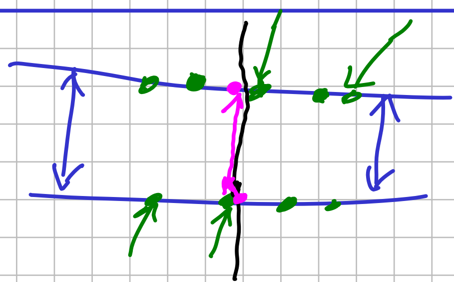
③ Dělení velkých děr ($\geq 6d$)

- slijeme seznamy na obou březích díry
- rozdělíme na skupiny:

3d	3d	3d	...	3d	<3d

3d ... 6d−1

nové mosty
kopie max. prvku ve skupině



čas $O(\text{velikost díry})$

Analýza času

penízky $ → kasička pro díru: díra velikosti g má $21 \cdot (g \dot{-} 3d)$ $
→ peněženka pro nový prvek: 6d $

Insert do Au zaplatí 27d+1 $.

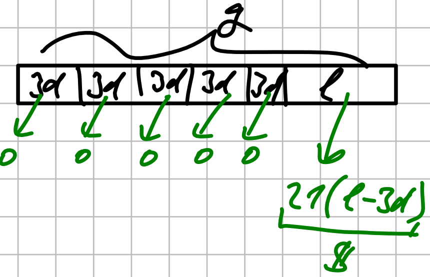
- vznikne nový prvek 6d $
- zvětšíme max. d děr po max. 21 $ ⇒ max. 21d $
- 1 $ na okamžitou práci

krok ② (county): skutečný čas $O(d \cdot \#\text{nových prvků})$
↳ zaplatím z peněženek nových prvků

krok ③ (dělení děr)

$g :=$ pův. velikost díry, $g \ge 6d$

v kasičce je $21\cdot(g-3d)$ \$



$\ell :=$ velikost posl. skup. $(3d \le \ell \le 6d-1)$

posl. skupinka dostane $21(\ell-3d)$ ✓

ostatní skup. uvolní $21\cdot 3d$ \$ $= 63d$ \$

Skupinka: stavím nový most → vyrobím ≤2 klony, každý:
- nový prvek do peněženky $6d$ \$
- zvětším až $d-1$ děr ⇓ do kasiček až $21(d-1)$ \$
- 1\$ utratím

$$2\cdot(\underbrace{6d + 21(d-1)}_{\substack{6d+21d-21 \\ 27d-21}}+1) = 54d-\cancel{42}\,40$$

→ zbývá aspoň $9d+40$ \$

↳ dost na projití všech skupinek včetně poslední (velké)

Prostor

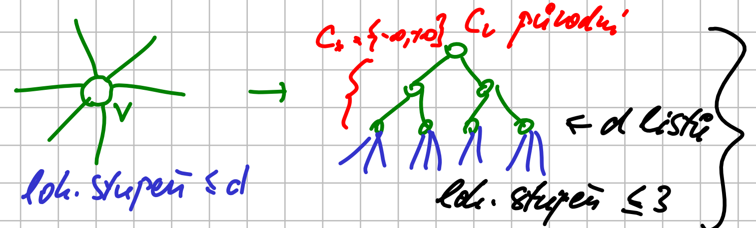
1 zlaťák Z = prostor na 1 prvek v A_u = d stříbrňáků S

Inv.: Díra velikosti g má $2\cdot(g \dot- 3d)$ S

Insert zaplatí 3Z:
- 1Z utratí
- 2Z → $2d$ S ... zvětšili jsme $\le d$ děr, každé ≤ 2S

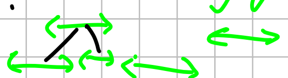
Fáze ③ díra měla $2(g \dot- 3d)$ S
- posl. skupina potřebuje $2(\ell-3d)$ S (velká ℓ)
- každá jiná skupina uvolní $6d$ S
  - naklony 2Z $= 2d$ S
  - za + konec mostu zvětšeno až $d-1$ děr $\le 2d-2$ S; celkem $\le 4d-4$ S

	Build	Prostor	Dotaz
Zatím:	$O(ds)$	$O(s)$	$O(\log s + t\cdot d)$
Chceme:	$O(s)$	$O(s)$	$O(\log s + t\cdot \log d)$



trik pro velká d

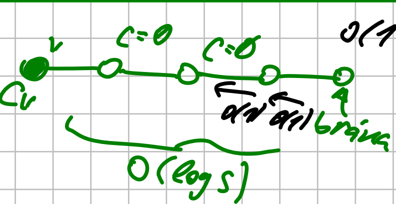
intervalový graf



víme: klikovost $\le d$

chceme: obarvení d barvami

Prvotní hledání

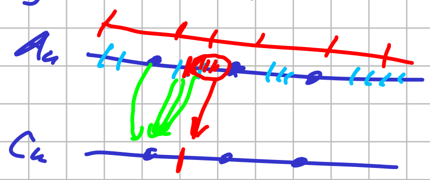


příjezdová cesta

brána b_v, $|A_{b_v}| \le O(1)$

[Sen 1990] Randomizovaný FC ... asymptoticky stejná složitost w.h.p.

Dynamizace: Insert ... skoro máme, pozor na pointery $A_u \to C_u$

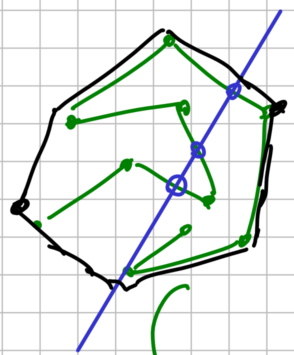


[Imai & Asano 1984]
Split/Find/Add
v $O(1)$ amort.
→ Insert v $O(1)$ amort.

Delete ... pomocí ?

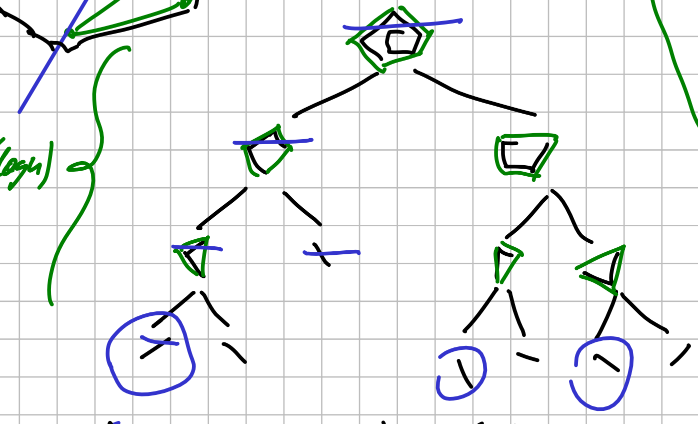
[Mehlhorn & Näher 1990] plná dynamizace Ins/Del $O(\log\log s)$
1 krok dotazu $O(\log d \cdot \log\log s)$

Průsečíky lomená čára ∩ přímka



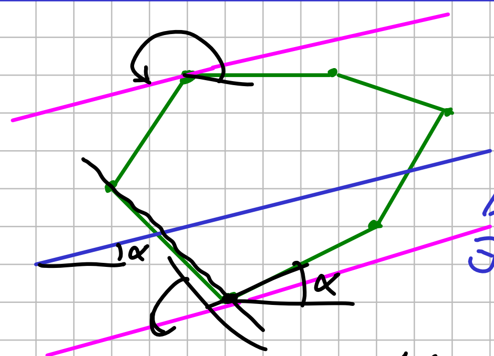
$O(\log n)$

(!) pokud přímka protne lom. čáru, pak protne i její konv. obal.



$O(n_i)$

$O(n)$ na hladinu



konvexní n-úhelník

D.S. pro ∃ průsečíku s přímkou

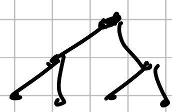
Setříděná posl. úhlů, pak hledám úhel dané přímky binárně

Build $O(n)$
Dotaz $O(\log n)$

Dotaz $O(\log^2 n + k \cdot \log^2 n)$ — $\log n + \log n$, $k \log n$

Build $O(n \cdot \log n)$

Umí se: 2D intervalové stromy obdél. dotaz v $O(\log n)$
3D — " — kvádr. dotaz v $O(\log n)$



k-dim. → $O(\log^{k-2} n)$