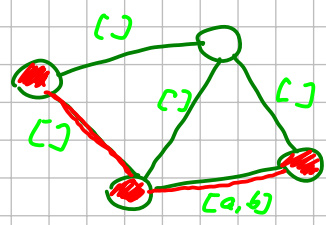


Fractional Cascading [Chazelle, Guibas 1986]

Df: Katalogový graf $G = (V, E)$. *neorientované; multi*

Pro $u \in V$: $C_u :=$ katalog ve vrcholu u , neklesající seznam $\{-\infty, +\infty\} \subseteq C_u$

Pro $e \in E$: $R_e :=$ interval přiřazený hraně, pokud $R_{uv} = [a, b]$, pak $a, b \in C_u \cap C_v$



Parametry:
 $n := |V|$ $n, m \in O(s)$
 $m := |E|$
 $S := \sum_u |C_u|$
 d $t := \#$ vrcholů v dotazu

Df: Lokální stupeň $\text{lddeg}(u) := \max_{x \in U} (\# \text{ hran } uv : x \in R_{uv})$

Předpokládáme: $\forall u \text{ lddeg}(u) \leq d$

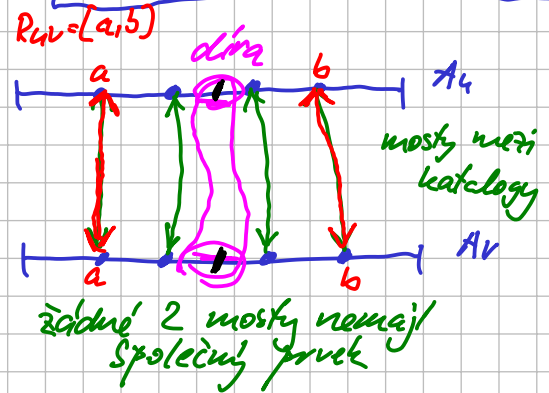
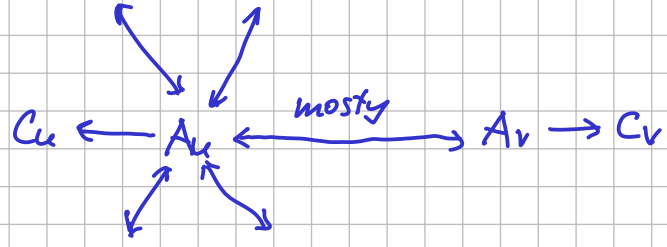
Dotaz: $x \in U$, zobecněná cesta: $v_1 \dots v_t \in V$
 $t_i - t_{i-1} > 1 \exists j < i : v_j v_i \in E \ \& \ x \in R_{v_j v_i}$
možná být adaptivně online

Chceme složitost:

	Build	Space	Query
①	$O(d \cdot s)$	$O(s)$	$O(\log s + t \cdot d)$
②	$O(s)$	$O(s)$	$O(\log s + t \cdot \log d)$

Odpověď: t_i pozice x v C_{v_i}

$\forall u \in V$ C_u doplním na A_u (augmented catalog)



Invariant: Neexistuje díra větší než $d \cdot d - 1$.

Reprezentace: prvek si pamatujeme

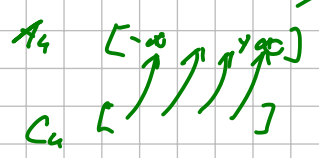
- $x \in A_u$
 - hodnota $x \in U$
 - odkaz do C_u (mosty následník)
 - předchozí / další v A_u
 - flag (tmp)
- pro konce mostů:
 - odkaz na hranu
 - odkaz na protější konec
 - odkaz na předchozí most v A_u pro stejnou hranu
 - count = velikost díry vlevo od mostu
 - rank (tmp) *na bránu u*

Odpověď na dotaz

- najdu x v A_{v_1} $O(\log s)$
 → dohledám v C_{v_1} díru
- krok po hraně $v_i v_{i+1}$ $O(d)$
 → pozice v $A_{v_{i+1}}$
 ↓
 pozice v $C_{v_{i+1}}$

KONSTRUKCE | Insert prvku do A_u na zadanou pozici

- ① samotné vlození: vložím 1 nový prvek
 - ② přepočítání countů
 - ③ rozdělení velkých děr novými mosty
- seznam velkých děr



2) Přepočít county

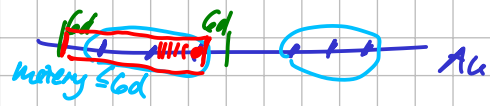
• nové prvky rozdělíme na clustery

(a) každý nový prvek: $flag = 1$ pro něj + $6d$ dolů

(b) Pro každý nový:

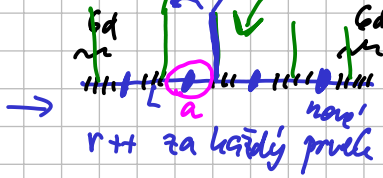
(b) M' = pokud $flag = 1$: najdu kraje clusteru

zpracuji cluster
nastavím $flag = 0$ uvnitř clusteru



→ cluster + $6d$ před je součástí posl. označených

trvá $O(d \cdot \# \text{ nových prvků})$



Navrátnu-li na most M :

$M.rank \leftarrow r$

$L \leftarrow M$. sousedů vlevo

Pokud $L.rank > 0$:

$a \leftarrow r - L.rank$

$M' \leftarrow M$. protější

$b \leftarrow M'$. count

$\sigma \leftarrow a \cdot b$ je dolní odhad velikosti díry

Pokud $\sigma \geq 6d$ & $M.count + b < 6d$:

→ přidám M do seznamu velkých děr

$M.count \leftarrow \sigma$

! přibližně nulujeme ranky.

Tvrdíme: • Po doběhnutí 2) jsou všechny county správné & každá velká díra je právě 1x v seznamu velkých děr.

• 2) trvá $O(d \cdot \# \text{ nových prvků})$