Bellman-Fordův algoritmus

Prof. Dr. Luděk Kučera, DrSc.

28. prosince 2003

Algoritmus Bellman-Fordův hledá nejkratší vzdálenost ze zadaného vrcholu grafu (počátku) do všech ostatních vrcholů grafu, přičemž se předpokládá, že graf, ve kterém se pracuje, je orientovaný a délky jeho hran mohou být obecně i záporné, v grafu však neexistuje cyklus se záporným součtem délek hran, dosažitelný z počátečního vrcholu.

Formálněji: je dán graf $G = (V, H)$ s množinou vrcholů V a množinou hran H, funkce $L : H \to R$, kde R je množina reálných čísel a vrchol $v_0 \in V$. Počet vrcholů grafu G budeme označovat N, počet jeho hran symbolem M. Je-li $h = (u, v)$ hrana grafu, pak $L(h) = L(u, v)$ se nazývá délkou hrany h. Délkou cesty $v_0, v_1, \ldots v_k = v$ v grafu G nazýváme součet délek hran (v_0, v_1), (v_1, v_2),. . .,(v_{k-1}, v_k) a budeme ji označovat $L(v_0, v_1, \ldots v_k)$. Cílem je určit pro každý vrchol $v \in G$ délku nejkratší cesty z v_0 do v.

Jestliže v G existuje cyklus $w_0, \ldots, w_k = w_0$ takový, že součet délek hran (w_0, w_1), (w_1, w_2),. . .,(w_{k-1}, w_k),(w_k, w_0) je záporný a navíc existuje cesta z počátku v_0 do některého vrcholu w tohoto cyklu, pak neexistuje minimum z délek cest z v_0 do w, protože je-li $v_0, v_1, \ldots, v_\ell = w$ libovolná cesta z v_0 do w (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $w = w_0$), pak cesta $v_0, v_1, \ldots, v_\ell = w = w_0, w_1, \ldots, w_k = w_0$ (tedy původní cesta doplněná jedním oběhem cyklu) je kratší a množina délek cest z v_0 do w tedy nemá minimum.

Kdybychom se v takovém případě omezili na minimum *prostých* cest z v_0 do ostatních vrcholů grafu, pak pokud délky hran grafu by byly všechny rovny -1, byla by délka cesty dána číslem opačným k počtu hran cesty. Nejkratší cesta (tedy cesta s nejzápornějším součtem délek hran) by proto byla cesta mezi uvažovanými vrcholy s *největším* počtem hran. Kdybychom v takovém grafu znali "nejkratší vzdálenosti" do všech vrcholů, zjistili bychom snadno, zda existuje z počátku do některého vrcholu prostá cesta, obsahující $N - 1$ hran, tedy *Hamiltonovská* cesta. Je ale známo, že problém rozhodnout o existenci Hamiltonovské cesty je NP-úplný, proto pro něj neexistuje algoritmus pracující v polynomiálně omezeném čase, pokud neplatí P=NP (což sice nikdo neumí ani dokázat ani vyvrátit, ale z praktického hlediska je to totéž jako kdyby se třídy P a NP nerovnaly).

Pokud v grafu neexistuje cyklus záporné délky dosažitelný z počátku, pak je-li $v_0, v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_\ell = v_k$ neprostá cesta z v_0 do v_k, pak její počáteční úsek $v_0, v_1, \ldots, v_k$ je také cesta do v_k, a má délku kratší o součet hran cyklu $v_k, \ldots, v_\ell = v_k$ a tedy je buď stejná (je li součet délek hran cyklu nulový) nebo menší. Proto buď všechny nebo alespoň některé nejkratší cesty do v_k jsou prosté. Jelikož množina prostých cest z v_0 do v_k je konečná, je minimum délek takových cest dobře definováno.

Problém hledání nejkratší cesty v obecně hranově ohodnoceném grafu proto budeme řešit za předpokladu neexistence cyklu záporné délky dosažitelného z počátku v_0. Bellman-Fordův algoritmus pracuje tak, že je-li předpoklad splněn a nejkratší cesty tedy existují, pak je nalezne, v opačném případě detekuje nějaký cyklus záporné délky dosažitelný z počátku. Je proto jej možno použít i na detekci záporného cyklu v obecně ohodnoceném grafu.

Při výpočtu pomocí Bellman-Fordova algoritmu mohou být vrcholy grafu ve třech stavech: *nedosažený*, *označený k probrání* a *probraný*. Algoritmus si také uchovává množinu Q vrcholů označených k probrání, implementovanou jako FIFO frontu. Pro účely důkazu si budeme ještě způsobem popsaným dále rozdělovat vrcholy označené k probrání jako *nově označené* a *dříve označené*. Nakonec ještě pro každý vrchol v budeme mít proměnnou $E(v)$, ve které bude po dobu výpočtu odhad (E jako "Estimation") délky nejkratší cesty z počátku do v (s výjimkou nedosažených vrcholů, pro které tato hodnota nebude definovaná) a vrchol $P(v)$ (předchůdce nebo anglicky predecessor) vrcholu v. $E(v)$, pokud bude definováno, bude přitom délkou jisté cesty z počátku do v. Označme si také pro každý vrchol v jako $D(v)$ délku nejkratší cesty z počátku v_0 do v (pokud neexistuje žádná cesta z počátku do v, je $D(v)$ nedefinováno). Na konci výpočtu budou hodnoty $E(v)$ udávat délky nejkratších cest do jednotlivých vrcholů, tedy bude $E(v) = D(v)$ a nejkratší cesta (obecně jedna z mnoha) do v bude cesta $v_0, v_1, \dots v_k = v$ jednoznačně definované předpisem $v_{i-1} = P(v_i)$ pro $i = 1, \dots, k$. (Poznamenejme, že zde uvedená tvrzení nejsou samozřejmá, ale budeme je v dalším muset dokázat).

Bellman-Fordův algoritmus

1. počátek v_0 je nově označen k probírání a zařazen do fronty Q,
ostatní vrcholy jsou neprobrané;
2. $E(v_0) = 0$, pro ostatní vrcholy v je $E(v)$ nedefinováno;
3. $P(v)$ není definováno pro žádný vrchol;
4. **while** fronta Q je neprázdná **do begin**

4a.   **if** ve frontě Q jsou jen vrcholy *nově* označené k probírání
4b.   **then** označ všechny vrcholy v Q jako *dříve* označené k probírání;
5.   vyjmi z Q první vrchol a označ jej jako v;
6.   **for** všechny hrany (v, w) vycházející z v **do begin**
7. $\ell = E(v) + L(v, w)$;
8.   **if** vrchol w je neprobraný nebo $\ell < E(w)$ **then begin**
9.   **if** w je označen k probírání **then** vyjmi w z fronty Q;
10.   označ w jako nově označený k probírání a zařaď jej na konec fronty Q;
11. $E(w) = \ell$; $P(w) = v$;
12.   **end**;
13.   **end**;
14.   **end**.

Jak již bylo uvedeno výše, rozdělení vrcholů ve frontě na dříve a nově označené k probíráni je zavedeno pouze pro účely důkazu výpočetní složitosti algoritmu, při praktickém výpočtu proto řádky 4a a 4b nemusí být prováděny. Stav vrcholu by také bylo možno odvodit z ostatních dat - vrchol v je nedosažený právě když je $E(v)$ není definováno a je označený k probírání právě když je ve frontě Q, ale je vhodné jej zaznamenávat, aby se předešlo referencím na nedefinované hodnoty, respektive provádění časově náročných operací (příslušnost do fronty Q).

Výpočet rozdělíme do fází číslovaných $0, 1, \ldots$; *nultá fáze* začíná započetím výpočtu, každá další *fáze* výpočtu začíná vždy prováděním řádku 4b, kde se změní "věk" všech vrcholů ve frontě Q. Je zřejmé, že nultá fáze je inicializace, spočívající v provedení řádků 1, 2 a 3 a prvním provedení testů 4 a 4a, poté následuje ihned první fáze, ve které se probírá jediný vrchol - počátek. V podstatě jediný důvod, proč dělíme vrcholy na nově a dříve probírané, je to, že je tím umožněna jednoduchá a jednoznačná definice fáze.

Lemma 1 *Pro každý vrchol v se hodnota $E(v)$ může v průběhu výpočtu jen zmenšovat.*

Důkaz: Zřejmé tvrzení. ♣

Lemma 2 *Nechť $v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ je (obecně neprostá) cesta v grafu G. Pak nejpozději v k-té fázi výpočtu bude hodnota $E(v)$ definována a menší nebo rovna délce cesty $v_0, v_1, \ldots, v_k = v$.*

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu hran cesty. Pokud $k = 0$, pak délka cesty v_0 (tvořené jediným vrcholem a žádnou hranou) je 0 a $E(v_0)$ je při inicializaci nastaveno na 0.

Nechť tvrzení platí pro $k - 1$. Pak nejpozději v $(k - 1)$-té fázi výpočtu se stane, že hodnota $E(v_{k-1})$ je definována a menší nebo rovna délce cesty $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$. V okamžiku kdy se tak stane poprvé, bude v_{k-1} označen k probírání a zařazen do fronty Q jako nově probíraný. V následující fázi (tedy nejpozději k-té) dojde k tomu, že tento vrchol v_{k-1} bude nejprve přehodnocen na dříve označený k probírání a posléze bude probírán a při tom bude probírána hrana (v_{k-1}, v_k) a hodnota $E(v_k)$ bude snížena na

$$E(v_{k-1}) + L(v_{k-1}, v_k) \leq L(v_0, \ldots, v_{k-1}) + L(v_{k-1}, v_k) = L(v_0, \ldots, v_k),$$

pokud již tuto nebo menší hodnotu $E(v_k)$ nemělo. ♣

Lemma 3 *Pokud je hodnota $E(w)$ definována, pak je rovna délce nějaké cesty z počátku do w.*

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu kroků algoritmu. Na začátku výpočtu po provedení inicializace zjevně platí. Platnost tvrzení by se mohla porušit jen v okamžiku, kdy je hodnota $E(w)$ poprvé definována nebo se mění, což se stane v okamžiku, kdy je uvažována nějaká hrana (v, w). Nechť až do tohoto okamžiku tvrzení platí pro všechny vrcholy grafu; pak je v tom okamžiku $E(v)$ rovno délce některé cesty z v_0 do v a nová hodnota $E(w)$ bude $E(v) + L(v, w)$, což je délka cesty do w, představované výše zmíněnou cestou do v doplněnou hranou (v, w). ♣

Lemma 4 *Doba trvání libovolné fáze je $O(N+M)$.*

Důkaz: Ve frontě Q se napřed nacházejí vrcholy dříve označené k probírání (jsou-li přítomny), následované vrcholy nově označenými k probírání (jsou-li přítomny). Jestliže není přítomen vrchol dříve označený k probírání, pak než je v řádku 5 vybrán vrchol v, jsou vrcholy překlasifikovány. Protože v řádku 5 je vždy vybírán první vrchol fronty Q, je jím vždy vrchol dříve označený.

V každé fázi je kterýkoli vrchol probírán pouze jednou, protože poté je vyjmut z Q a kdyby byl do Q znovu zařazen, bude označen jako nově probíraný a tedy probírán až v následující fázi.

Probírání vrcholu spočívá v tom, že se - právě jednou - probere každá hrana vycházející z tohoto vrcholu. V jedné fázi se proto každý vrchol i každá hrana probírá nejvýše jednou. ♣

Poznámka: Pokud uvažovaný graf není souvislý, stačí se omezit na jeho komponentu, obsahující počátek, protože vrcholy v ostatních komponentách jsou z počátku nedosažitelné. Je-li ale graf je souvislý, pak $M \geq N-1$ a tedy $O(N+M)$ můžeme v předchozím lemmatu nahradit odhadem $O(M)$.

Z uvedeného lemmatu plyne, že

Věta 5 *Výpočet Bellman-Fordova algoritmu se zastaví právě tehdy, když neexistuje cyklus se záporným součtem délek hran, dosažitelný z počátku. Jestliže se výpočet zastaví, pak se tak stane nejpozději v N-té fázi po $O(N(N+M))$ krocích a pro každý vrchol v dosažitelný z počátku je $E(v) = D(v)$.*

Důkaz: Nechť v grafu existuje cyklus se záporným součtem délek hran a cesta z počátku do některého jeho vrcholu w. Kdyby se výpočet v takovém případě po konečném počtu kroků zastavil, existovalo by minimum E_{min} z hodnot $E(w)$ v průběhu celého výpočtu. Pro dostatečně velké k má ale cesta z počátku do vrcholu w, doplněná k oběhy cyklu, délku menší než E_{min}, což je spor s předchozím lemmatem.

Jestliže je v průběhu výpočtu $E(v)$ definováno, pak podle lemmatu 3 do v vede cesta z počátku. Jestliže naopak do v vede cesta z počátku, je po nějaké době $E(v)$ definováno.

Pokud v grafu neexistuje zaporný cyklus dosažitelný z počátku, pak lze definovat vzdálenosti D do vrcholů grafu. Jestliže do vrcholu v vede cesta, pak existuje prostá cesta z počátku do v, která má délku $D(v)$. Protože je prostá, má tato cesta nejvýše $N-1$ hran. Podle lemmatu 2 tedy bude nejpozději v $(N-1)$-té fázi $E(v)$ definováno a bude nejvýše rovno $D(v)$, naopak podle lemmatu 3 je $E(v)$ vždy větší nebo rovno délce nejkratší cesty do v.

Nejpozději v $(N-1)$-té fázi je proto $E(v) = D(v)$ pro všechny dosažitelné vrcholy. Protože $E(v)$ jen klesá, se pak již ale pro žádný vrchol nemění; jelikož ale při zařazování vrcholu v do fronty Q se $E(v)$ musí změnit, nebude v případné N-té fázi měněno $E(w)$ žádného vrcholu ani nebudou do fronty Q zařazovány vrcholy a tedy na konci N-té fáze bude fronta Q prázdná a výpočet skončí. Vidíme z toho, že by ve skutečnosti stačilo $N-1$ fází, případná N-tá fáze je jen ověřením, že již byly nalezeny konečné hodnoty vzdáleností. ♣

Tím je dokázána správnost algoritmu i terminace výpočtu za podmínek aplikovatelnosti. V následujícím dokážeme řadu dalších tvrzení, které dávají bližší obraz o průběhu výpočtu Bellman-Fordova algoritmu a umozní i nejkratší cesty do vrcholů grafu snadno nalézt (pole E udává jen jejich délky, ale ne jejich popis).

Lemma 6 *Je-li $v_0, \ldots, v_i, \ldots v_k$ nejkratší cesta do v_k, pak $v_0, \ldots, v_i$ je nejkratší cesta do v_i.*

Důkaz: Kdyby existovala kratší cesta do v_i, pak její složení s cestou $v_i, \ldots, v_k$ by byla cesta do v_k, kratší než $v_0, \ldots, v_i, \ldots v_k$, spor. ♣

Lemma 7 *Nechť (v, w) je hrana grafu G a $D(v)$ je definováno. Pak $D(w) \leq D(v) + L(v, w)$. Pokud tato hrana leží na nejkratší cestě do nějakého vrcholu, pak $D(w) = D(v) + L(v, w)$.*

Důkaz: Je-li $D(v)$ definováno, pak existuje cesta délky $D(v)$ z počátku do v. Doplnění této cesty o hranu (v, w) dává cestu z počátku do w, která má délku $D(v)+L(v, w)$. Proto je $D(w)$ definováno a nemůže být větší než $D(v)+L(v, w)$. Nechť nyní je $v_0 = z_0, \ldots, z_\ell$ nejkratší cesta do z_ℓ a pro nějake i, $0 < i \leq \ell$ je $v = z_{i-1}$, $w = z_i$. Pak podle lemmatu 6 je $v_0 = z_0, \ldots, z_i$ nejkratší cesta do $w = z_i$ a má tedy délku $D(w)$ a $v_0 = z_0, \ldots, z_{i-1}$ je nejkratší cesta do $v = z_{i-1}$ a má tedy délku $D(v)$. Rozdíl $D(w) - D(v)$ je tedy roven $L(v, w)$. ♣

Lemma 8 *Nechť w je vrchol grafu G. Pokud $P(w)$ je definováno, pak $(P(w), w)$ je hrana grafu G.*

Důkaz: $P(w)$ je poprvé definováno a nebo měněno pokud je probírána hrana (v, w) v řádku 6 až 14 algoritmu a $P(w)$ je pak položeno rovné vrcholu v a tedy $(v, w) = (P(w), w)$ je hrana G. ♣

Lemma 9 *$P(v_0)$ není definováno, pro ostatní vrcholy w je $E(w)$ je definováno právě když je definováno $P(w)$. Pro všechny vrcholy je $E(w)$ definováno právě když vrchol w není nedosažený.*

Důkaz: $E(w)$ a $P(w)$ jsou pro $w \neq v_0$ vždy definovány nebo měněny současně. V okamžiku, kdy $E(w)$ pro $w \neq v_0$ poprvé definujeme, se současně stav vrcholu w mění z nedosaženého na označený k probrání. Stav probraného vrcholu nebo vrcholu označeného k probrání se nikdy nemůže změnit na nedosažený a stejně tak pokud $E(w)$ je jednou definováno, může být nadále měněno, ale zůstává stále definováno. ♣

Lemma 10 *Je-li $P(w)$ definováno a označíme-li $v = P(w)$, pak $E(v)+L(u, v) \leq E(w)$.*

Důkaz: Je-li $P(w)$ definováno, pak uvažujme okamžik, kdy $P(w)$ bylo naposledy změněno. Současně s tím bylo také naposledy změněno $E(w)$ a to při probírání hrany (v, w); hodnota $E(w)$ byla tedy změněna na $E(v) + L(u, v)$ takže nerovnost platila (dokonce jako rovnost). Od té doby se, jak předpokládáme, $E(w)$ nezměnilo (a $L(v, w)$ je pochopitelně stále stejné), ale $E(v)$ se změnit mohlo; podle předchozího lemmatu ale v takovém případě kleslo, čímž se platnost nerovnosti nemůže porušit. ♣

Lemma 11 *Je-li $E(w)$ definováno, pak buď vrchol $v = P(w)$ je počátek v_0 nebo jsou $E(v)$ a $P(v)$ také definovány.*

Důkaz: Nechť je $E(w)$ v jistém okamžiku buď poprvé definováno nebo měněno. To nastává v okamžiku, kdy je v řádku 6 až 14 algoritmu probírána nějaká hrana (v, w) a $P(w)$ bude po provedení změny rovno v. Hrana (v, w) je ale probírána když v byl označen jako probraný a podle předchozí věty tedy pro něj $E(v)$ i $P(v)$ již bylo definováno, pokud v není počátek v_0. ♣

Z předchozího vyplývá, že pokud vrchol w není nedosažený a pokud tedy $P(w)$ je definováno, pak existuje jednoznačně vytvořená posloupnost $w = w_0, w_1, \ldots$ definovaná předpisem $w_i = P(w_{i-1})$, která je buď konečná a končí počátkem v_0 a nebo je nekonečná. Pokud tato posloupnost je konečná a její poslední prvek w_ℓ je počátek, pak obrácená posloupnost $v_0 = w_\ell, w_{\ell-1}, \ldots, w_0 = w$ je cestou v grafu G a tuto cestu budeme nazývat *vytčená cesta* do vrcholu w. Pokud je ale posloupnost $w = w_0, w_1, \ldots$ nekonečná, pak se musí zacyklit, protože množina vrcholů grafu G je konečná. Rozeberme nyní, za jakých okolností může taková situace nastat.

Lemma 12 *Nechť pro nějaké vrcholy $z_0, z_1, \ldots, z_k$ platí $z_{i-1} = P(z_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$ a $z_k = P(z_0)$. Pak $z_0, z_1, \ldots, z_k$ je cyklus grafu G a součet délek jeho hran je záporný. Navíc existuje cesta z počátku v_0 do některého vrcholu tohoto cyklu.*

Důkaz: Podle lemmatu 8 je $z_0, z_1, \ldots, z_k$ cyklus grafu G. Uvažujme *první* okamžik výpočtu, kdy nastalo $z_{i-1} = P(z_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$ a $z_k = P(z_0)$ (na počátku výpočtu tato situace nenastávala, protože P nebylo definováno pro žádný vrchol). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se tak stalo, když byla změněna hodnota $P(z_0)$. Změna $P(z_0)$ na hodnotu z_k byla provedena v okamžiku, kdy byla probírána hrana (z_k, z_0) a platilo $E(z_k) + L(z_k, z_0) < E(z_0)$. Současně podle lemmatu 10 bylo $E(z_{i-1}) + L(z_{i-1}, z_i) \leq E(z_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$. Dohromady tedy bylo

$$L(z_0, z_1) + \ldots + L(z_{k-1}, z_k) + L(z_k, z_0) \leq$$

$$[E(z_1) - E(z_0)] + \ldots + [E(z_k) - E(z_{k-1})] + L(z_k, z_0) = E(z_k) - E(z_0) + L(z_k, z_0) < 0.$$

Součet délek hran cyklu tedy byl záporný. Kromě toho před uvažovanou změnou $P(z_0)$ byl z_k ve frontě Q a tedy $E(z_k)$ bylo definováno a proto podle lemmatu 3 existuje cesta z počátku v_0 do z_k. ♣

Následující úvahy vycházejí z předpokladu, že v grafu neexistuje cyklus se záporným součtem délek hran, dosažitelný z počátku. Jak plyne z předchozího lemmatu, pro každý vrchol w takový, že $P(w)$ je definováno, je definována vytčená posloupnost, vedoucí z počátku v_0 do w. Vytčená cesta se ovšem v průběhu výpočtu může měnit a je také zřejmé, že vytčená cesta do w existuje právě když vrchol w není nedosažený.

Lemma 13 *Pro počátek v_0 platí $D(v_0) = 0$.*

Důkaz: 0 je délka triviální cesty v_0 z počátku do sebe sama. Kdyby existovala cesta z v_0 do sebe sama s délkou menší než 0, byl by to současně záporný cyklus. ♣

Věta 14 *Je-li $E(v) = D(v)$, pak je délka vytčené cesty do v rovna $D(v)$.*

Důkaz: Nechť $v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ je vytčená cesta do v. Podle lemmatu 10 je $E(v_{i-1}) + L(v_{i-1}, v_i) \leq E(v_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$. Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$E(v_0) + L(v_0, v_1) + \cdots + L(v_{k-1}, v_k) \leq E(v_k) = E(v) = D(v).$$

Uvědomíme-li si, že $E(v_0) = 0$, vidíme, že délka vytčené cesty do v není větší než $D(v)$; menší ale být nemůže, protože $D(v)$ je délka nejkratší cesty do v. ♣

Tato věta nám umožňuje nalézt konkrétní nejkratší cestu do každého dosažitelného vrcholu v okamžiku, kdy se výpočet Bellman-Fordova algoritmu zastaví.

Řekneme, že cesta $C = (v_0, \ldots, v_k)$ je optimální cesta do $v = v_k$, jestliže pro jakoukoli jinou cestu z $v_0 = w_0, \ldots, v_m = v$ platí buď $L(v_0, \ldots, v_k) \leq L(w_0, \ldots, v_m)$ (t.j. C je nejkratší cesta z v_0 do v nebo jedna z nejkratších) a pokud platí rovnost $L(v_0, \ldots, v_k) = L(w_0, \ldots, v_m)$, pak současně $k \leq m$ (t.j. má navíc mezi nejkratšími cestami nejmenší počet hran). Je zřejmé, že optimálních cest do daného vrcholu může být více.

Následující lemma je rozšířením lemmatu 6.

Lemma 15 *Nechť $v_0, \ldots, v_k$ je* optimální cesta *z v_0 do v, pak pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je $v_0, \ldots, v_i$ optimální cesta do v_i*

Důkaz: Pokud bychom se do nějakého v_i dostali kratším způsobem a nebo stejně dlouhou cestou ale s menším počtem hran, pak by doplnění takové cesty o $v_i, \ldots, v_k$ dalo kratší cestu do v_k nebo stejně dlouhou cestu s menším počtem hran, což by obojí bylo spor s optimalitou cesty $v_0, \ldots, v_k$ ♣

Řekneme, že vrchol v dosažitelný z počátku leží v k-té vrstvě, jestliže optimální cesta z počátku v_0 do v má k hran. Z definice je zřejmé, že všechny optimální cesty do daného vrcholu mají stejný počet hran a do vrcholu vede optimální cesta z počátku právě když je z počátku dosažitelný; definice je proto korektní. Je zřejmé, že žádný vrchol nemůže být ve vrstvě vyšší než $N - 1$.

Věta 16 *V okamžiku ukončení k-té fáze vždy platí následující tvrzení:*

Hlavní invariant
pro každé $\ell < k$ jsou všechny vrcholy v, které leží v ℓ-té vrstvě, probrané a $E(v) = D(v)$;

všechny vrcholy v, které leží v k-té vrstvě, jsou označeny k probírání a $E(v) = D(v)$ je pro ně rovno délce nejkratší cesty z počátku do v;
pro každé $\ell > k$ mohou být vrcholy v, které leží v ℓ-té vrstvě, v libovolném ze tří možných stavů, ale $E(v)$ buď není definováno nebo je $E(v) > D(v)$.

Důkaz: Důkaz se provede indukcí podle fáze. V nulté fázi je $k = 0$ a proto neexistují žádné vrcholy v nižších vrstvách; počátek v_0 je na začátku výpočtu ve frontě Q, pro ostatní vrcholy je $E(v)$ nedefinováno.

Nechť nyní tvrzení platí pro jisté k. Po ukončení k-té fáze se všechny vrcholy ve frontě Q, v to počítaje všechny vrcholy v k-té vrstvě, překlasifikují na dříve označené k probírání a proto v průběhu $(k+1)$-té fáze budou všechny zvoleny jako v v řádku 5 a poté označeny jako probrané. Jelikož $E(v)$ pro vrcholy k-té vrstvy má už hodnotu rovnou $D(v)$, $E(v)$ se již nebude měnit a proto vrcholy z k-té vrstvy již nikdy nezmění stav.

Vrcholy w ve vrstvách $k+2, \dots$ buď hodnotu $E(w)$ v $(k+1)$-té fázi nezmění nebo ji změní, ale na hodnotu, která bude stále vyšší než je délka nejkratší cesty do w. Pokud se totiž v $(k+1)$-té fázi hodnota $E(w)$ změní, pak k tomu dojde při probírání jisté hrany (v, w) v řádcích 7 až 14. Pak jsou dvě možnosti.

Buď je v ve vrstvě $\ell > k$, pak ale podle lemmatu 7 je $D(w) \leq D(v) + L(v, w) < E(v) + L(v, w)$ a proto ani nová hodnota $E(w)$, rovná $E(v) + L(v, w)$ nebude rovna optimální vzdálenosti $D(w)$.

Nebo v je v k-té vrstvě a pak $E(v) = D(v)$, kromě toho je $D(v)$ délka optimální cesty $v_0, \dots, v_k = v$ do v, která má k hran, protože v leží v k-té vrstvě. Kdyby nová hodnota $E(w)$, rovná $E(v) + L(v, w)$, byla rovna $D(v)$, pak by $v_0, \dots, v_k, w$ byla nejkratší cesta do w a měla by ale $k+1$ hran, což je spor s naším předpokladem, že w leží ve vrstvě $k+2$ nebo vyšší.

Nechť nakonec w je vrchol ve vrstvě $k+1$. Pak existuje optimální cesta $v_0, \dots, v_k, v_{k+1} = w$. Její počáteční segment $v_0, \dots, v_k$ je tedy podle lemmatu 15 optimální cesta do v_k a proto v_k leží v k-té vrstvě a navíc $D(w) = D(v_k) + L(v_k, w)$ podle lemmatu 7. Podle indukčního předpokladu je proto v_k na začátku $(k+1)$-té fáze ve frontě Q a v průběhu $(k+1)$-té fáze bude probírán. Při tom bude také uvažována hrana (v_k, v_{k+1}) a pokusíme se $E(w)$ změnit na hodnotu $E(v_k) + L(v_k, v_{k+1})$. Jelikož ale $D(w) = D(v_{k+1}) = D(v_k) + L(v_k, v_{k+1}) = E(v_k) + L(v_k, v_{k+1}) = E(v_k) + L(v_k, w)$, bude hodnota $E(w)$ změněna na $D(w)$, pokud již tuto hodnotu neměla dříve. Jesliže ale $E(w)$ již tuto hodnotu mělo, muselo k tomu dojít v jiném okamžiku $(k+1)$-té fáze, protože na konci k-té fáze bylo podle indukčního předpokladu $E(w) > D(w)$. Protože došlo v $(k+1)$-té fázi ke změně $E(w)$, je v této fázi w zařazen jako nově probíraný do fronty Q a tedy v ní až do konce $(k+1)$-té fáze setrvá. ♣

Uvedená věta poskytuje zcela detailní pohled na práci Bellman-Fordova algoritmu. Vidíme, že v k-té fázi je zpracování vrcholů z vrstev $1, \dots, k-1$ již ukončeno - tyto vrcholy nejenom že mají hodnotu $E(w)$ rovnou vzdálenosti od počátku, ale tato informace již byla použita úplným způsobem. Dále je zřejmé, že je užitečné (a nutné) pracovat s těmi vrcholy ve frontě Q, které jsou v k-té vrstvě, zatímco probírání vrcholů z vyšších vrstev je vlastně zbytečné, protože informace $E(w)$ není konečná a proto cokoliv je z této informace vyvozeno bude stejně za čas změněno. Rozdělení vrcholů do vrstev však je známo až na konci výpočtu a proto není možno v průběhu výpočtu poznat, zda je zvolený vrchol probírán užitečně nebo zbytečně; proto musí algoritmus probrat vrcholy všechny.

Jak bylo uvedeno hned zpočátku, pokud v grafu existuje záporný cyklus dosažitelný z počátku, výpočet algoritmus se zacyklí. Jelikož nyní již víme, že pokud výpočet končí, je provedeno nejvýše N fází a v každé fázi je vybráno nejvýše N vrcholů v řádku 5 a uvažováno nejvýše M hran v řádcích 7-13, můžeme algoritmus doplnit počítadlem počtu provedení probrání vrcholů nebo hran; jakmile stav počítadla překročí N^2 pro vrcholy nebo MN pro hrany, výpočet zastavíme a víme, že v grafu je záporný cyklus.

V některých aplikacích ale chceme, aby v případě existence dosažitelného záporného cyklu by tento také nalezen. Výše jsme ukázali, že pokud v grafu předchůdců vznikne cyklus, pak je to opačné orientovaný záporný cyklus v původním grafu G. Ukážeme nyní, že naopak pokud v grafu G existuje dosažitelný záporný cyklus, pak v průběhu výpočtu vznikne cyklus v grafu předchůdců.

Věta 17 *Pokud v grafu G existuje cyklus se záporným součtem délek hran a cesta z počátku do některého jeho vrcholu, pak od jistého okamžiku existuje v grafu předchůdců cyklus.*

Důkaz: Nechť D je délka nejkratší prosté cesty začínající v počátku. Uvažujme okamžik výpočtu, kdy v grafu předchůdců není cykl. Pak pro každý vrchol v, který není nedosažený, existuje vytčená cesta, která do něj vede. Z lemmatu 10 plyne, že je $E(v)$ rovno nebo větší než délka vytčené cesty. Jelikož vytčená cesta je prostá, plyne z toho, že pro všechny vrcholy je $E(v) \geq D$.

Z lemmatu 2 ale plyne, že po jistě době $E(v)$ vrcholů v dosažitelném záporném cyklu poklesne pod D a větší než D již nikdy nebude. Nejpozději od té doby tudíž musí po zbytek výpočtu v grafu předchůdců existovat cyklus. ♣

Z úvah provedených v důkazu lemmatu 12 plyne, že se cykl v grafu předchůdců poprvé objeví když se probírá nějaká hrana (v, w) za situace, když $E(v) + L(v, w) < E(w)$ a přitom w leží na vytčené cestě z počátku do v. Očekáváme-li, že v grafu existuje dosažitelný záporný cyklus, probírání hrany (v, w) můžeme v našem algoritmu doplnit následujíci procedurou:

1. z:=w;
2. **while** z není rovno ani počátku v_0 ani vrcholu v **do** z:=P(z);

Jestliže na konci tohoto výpočtu je $z \neq v$, pak v grafu předchůdců cykl nevznikl, výpočet pokračuje dále beze změny; pokud ale je $z = v$, pak segment původní vytčené cesty do w mezi vrcholy v a w spolu s hranou (w, v) je dosažitelný záporný cyklus. To umožní zastavit výpočet obecně po podstatně menším počtu iterací než při použití počitadla cyklů, ale zase může zbytečně prodlužovat jednu iteraci **while** cyklu základního algoritmu a tím nakonec nadělat více škody než užitku. Konkrétní a nejvhodnější způsob detekce záporného cyklu je proto závislý na situaci, ve které se algoritmus provádí.