Algovize

Luděk Kučera

12. ledna 2008

1 Voronoi diagram bodů roviny

Scéna: *Místa*

Na displeji jsou černými kolečky znázorněny body v rovině, které budeme nazývat *místa*. Množina míst představuje vstupní data pro hledání Voronoi diagramu. V této scéně i většině následujících je možno vytvořit novou množinu míst knoflíkem [**Nový vstup**], její velikost se může nastavit v poli vedle návěští [**N=**]. Ve scénách, kde jsou přístupné, mohou být použity knoflíky [**Zvětši**] a [**Zmenši**] pro zoomování obrazu, které mnohdy přinese zajímavý nový pohled na celkovou konfiguraci (v případě potřeby zvolte [**Více ovladačů**]).

Na ovladači je také volba funkce myši (použitá i v některých dalších scénách):

- Volba [**Pohyb diagramem**] (klávesa 't'): Myší je posouvat rovinu, ve které se nacházejí místa a Voronoi diagram.
- Volba [**Pohyb místa**] (klávesa 'm'): Myší je možno zachytnout místo a táhnout jej libovolně po displeji.
- Volba [**Přidání místa**] (klávesa 'i'): Klepnutí myší do prázdné části obrazovky se vytvoří v místě klepnutí nové místo.
- Volba [**Vynechání místa**] (klávesa 'd'): Klepnutím myší na existující místo se toto vymaže.

Scéna: *Voronoi diagram*

Tato scéna ukazuje Voronoi diagram pro zvolenou množinu míst. Kolem každého místa se nachází oblast ve tvaru konvexního mnohoúhelníka, ohraničeného černými čarami. Některé z hraničních čar jsou úsečky konečné délky, jiné jsou polopřímky.

Vyjímečně se může stát, že hranicí je přímka (pak je oblastí polorovina) nebo 2 rovnoběžné přímky (pak je oblastí nekonečný pás), ale je-li míst více než 2, je to mimořádně nepravděpodobné. Tyto situace budou ukázány ve scéně zabývající se degenerovanými případy.

Body roviny se rozdělí do několika kategorií:

- Vnitřek oblasti kolem místa s je tvořena těmi body roviny, ze kterých je do místa s blíže než do libovolného jiného místa z uvažované množiny.
- Body, které leží na hranici oblastí příslušných místům s_1 a s_2, jsou ty body, ze kterých je do s_1 a s_2 stejně daleko a přitom blíže než do jakéhokoli jiného místa. Takové body leží na dělících přímkách a polopřímkách, ale nejsou jejich koncovými body.
- Dále jsou v diagramu body, které leží současně na hranici oblastí tří různých míst s_1, s_2 a s_3. Tyto body jsou stejně vzdáleny od všech tří míst s_1, s_2 a s_3 a přitom jsou jim blíže než libovolnému dalšímu místu. Jedná se o koncové body dělicích úseček a polopřímek.

- Obecně se mohou vyskytnout i body x, které mají čtyři nebo více nejbližších míst. Tento případ je ale u náhodně zvolené množiny míst velmi nepravděpodobný: bod x by byl na hranici čtyř oblastí (jako čtyřbod Four Corners na hranici Arizony, Colorada, Nového Mexika a Utahu v USA) a jeho nejbližší místa by musela všechna ležet na kružnici se středem v x. Takovéto a další degenerované případy rozebereme podrobněji dále.

Body, které jsou na hranicích tří nebo více oblastí se nazývají *Voronoi body.*

Měňte soubor míst jejich posunem, přidáváním a vynecháváním a pozorujte, jak se diagram mění.

Scéna: *Animace algoritmu*

Tento applet ukazuje, jak se Voronoi diagram nalezne algoritmem, který popsal S. Fortune. Poznamenejme, že existují i další algoritmy pro hledání diagramu. Inkrementální algoritmus postupně pro $k = 1, \ldots, N$ vytváří Voronoi diagram pro prvních k míst tak, že začne z triviálního diagramu pro jedno místo a postupně jej rozšiřuje přidávajíce po jednom další místa. Algoritmus typu "rozděl a panuj" rozdělí místa na dvě zhruba stejně velké části nalevo a napravo od jisté vertikální dělící přímky, vytvoří (rekurzivní aplikací sebe sama) jejich Voronoi diagramy, které pak zkombinuje do diagramu celé množiny míst. Fortunův algoritmus jsme zvolili proto, že je založen na velmi elegantní algoritmické myšlence.

Algoritmus bude také vykládán v 3D nákresu. Abych předešel možným nedorozuměním týkajících se směru "nahoru" a "dolu", budu horní část obrazovky zásadně označovat jako "severní" a dolní část obrazovky jako "jižní", užívajíce konvenci běžnou v kartografii. Pojem "horní" a "dolní" budu používat jen v 3D representaci, kdy předpokládám, že se na situaci díváme shora a proto "horní" bude znamenat "blíže k pozorovateli" a "dolní" bude "dále od pozorovatele."

Fortunův algoritmus je typu "sweep line" (zametací přímka). V této scéně se po chvíli objeví na displeji přímka, která "zametá" rovinu od jihu k severu a v každém okamžiku ukazuje Voronoi diagram pro body, které už byly zametací přímkou dosaženy - přesněji řečeno tu část tohoto diagramu, která se již nebude měnit a zůstane ve své podobě jako součást výsledného diagramu celé množiny míst. Zametací přímka není ve skutečnosti explicitně nakreslena, ale je dána pohybujícím se rozhraním mezi tmavou a světlou částí roviny.

Běh algoritmu je možno zastavit knoflíkem [**Stůj**] a znovu spustit knoflíkem [**Nahoru**] a nebo jej pustit pozpátku knoflíkem [**Dolů**]. Je také možné skočit na konec výpočtu knoflíkem [**Konec**] nebo se vrátit na začátek knoflíkem [**Začátek**] a knoflíkem [**Dolů**] nebo [**Nahoru**] znova algoritmus spustit. Zametací přímkou je také možno pohybovat myší: při zmačknutí myši mimo ovladač zametací přímka skočí tak, aby procházela bodem, kde bylo myší klepnuto a při pohybu myši při stisknutém levém knoflíku se bodu určeného kurzorem drží.

V jisté vzdálenosti za zametací přímkou se objevuje červeně nakreslená čára, která se pro svůj tvar v anglické literatuře označuje jako "beachline" - pobřežní čára. Jak je vidět, Voronoi diagram je kreslen jen v oblasti *na jih* od pobřežní čáry. Je to proto, že (jak ukážeme dále) tvar výsledného diagramu v oblasti na jih od pobřežní čáry je jednoznačně dán místy, které už byly "zameteny" zametací přímkou, zatímco v oblasti mezi pobřežní čárou a zametací přímkou může ještě být ovlivněn místy, které ještě zametací přímkou dosaženy nebyly. Pochopitelně v oblasti na sever od zametací přímky ještě také není možno určit, jak výsledný diagram bude vypadat.

Při podrobnějším zkoumání zjistíme, že pobřežní čára je složena z řady oblouků (jak dále uvidíme, jsou to části parabol) a místa, ve kterých se tyto oblouky setkávají, kreslí Voronoi diagram. Proč tomu tak je uvidíme v následujících scénách.

Scéna: *Kužely*

Tato scéna přináší alternativní pohled na situaci, která byla popsána v předchozích scénách. Přináší pohled, který může velmi usnadnit chápání algoritmické myšlenky Fortunova algoritmu, ale některým čtenářům naopak působí obtíže, protože vyžaduje prostorovou představivost a schopnost si vytvořit třídimenzionální obrázek na základě dvoudimenzionálního náčrtu. Jelikož není bezpodmínečně nutná pro výklad algoritmu, je možno ji přeskočit a po případě se k ní vrátit později, i když si myslím, že pochopení algoritmu usnadňuje a prohlubuje.

Zobrazení této scény je výpočetně náročné, může se proto stát, že při jejím kreslení a překreslování bude docházet k prodlevám.

Scéna znázorňuje stejnou situaci jako scény předcházející, ale znázorněnou nikoli v rovině, ale v třídimenzionálním prostoru. Rovina, ve které se nachází místa, jejichž Voronoi diagram hledáme, je vnořena do 3D prostoru. Můžeme si představovat, že tato rovina je vodorovná a díváme se na ní shora.

Z každého místa je spuštěn rotační kužel, který je vystínován jakoby na něj dopadalo zleva světlo. Spádnice kuželů mají úhel 45 stupňů. Celá situace tedy znázorňuje pohoří, ve kterém hory mají pravidelný a shodný tvar a jejich vrcholy (naše místa) jsou ve stejné výšce. Při pohledu shora pochopitelně kužely nevidíme celé, neboť se navzájem překrývají; z každého kuželu vidíme tu část, která shora není zakryta jiným kuželem.

Pohybem myši se stisknutým knoflíkem nahoru a dolu je možno pohoří naklápět - naklopte jej tak, abyste se na něj dívali z boku. Pohybem myši zleva doprava se pohořím otáčí. (Pohoří není zobrazeno celé, ale jen jeho výřez, který byl vidět při vertikálním pohledu). Knoflíkem [**Vertikální**] je možno jej vrátit do výchozí polohy.

Podívejme se nejprve na libovolný bod x, ležící na povrchu kuželu určeného některým místem s a označme si jako x_0 vertikální průmět bodu x do vodorovné roviny obsahující místa (vrcholy kuželů). Trojúhelník xx_0s je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, protože úhel xx_0s je pravý a úhel x_0sx je 45 stupňů. Proto "vodorovná vzdálenost" x a s, čímž míníme vzdálenost místa s a svislého průmětu x_0 bodu x do vodorovné roviny míst, je stejná jako rozdíl nadmořských výšek bodu x a místa s.

Podívejme se nyní na libovolný bod x, který leží v průsečíku povrchů dvou kuželů, jejichž vrcholy jsou představovány místy s_1 a s_2 a není shora zakryt žádným jiným kuželem. Jelikož místa s_1 a s_2 leží ve stejné nadmořské výšce, je výškový rozdíl mezi x a s_1 stejný jako výškový rozdíl mezi x a s_2. Z předchozího odstavce pak plyne, že"vodorovná vzdálenost" x a s_1 je stejná jako pro x a s_2, jinými slovy že svislý průmět x_0 bodu x do roviny míst je od s_1 stejně daleko jako od s_2. Navíc je-li s_3 libovolné další místo a y je bod kužele s vrcholem s_3, který je pod bodem x_0, pak y je alespoň tak hluboko pod rovinou míst jako x, protože předpokládáme, že x není při pohledu shora zastíněn žádným jiným kuželem. Proto vzdálenost průmětu x_0 od místa s_3 je alespoň taková jako jeho vzdálenost od s_1 a s_2.

Z toho co bylo řečeno vyplývá, že průměty bodů, které leží na alespoň dvou kuželech současně a nejsou shora zakryty jiným kuželem, vytvářejí hranice oblastí Voronoi diagramu dané množiny míst. Pokud se tedy díváme na pohoří kuželů shora a to z takové výšky, že perspektivní zkreslení je zanedbatelné, představují dna údolí hraniční úsečky a polopřímky Voronoi diagramu.

Scéna: *Zametací rovina*

Představme si nyní, že pohoří je "zametáno", ale nikoliv přímkou, nýbrž rovinou, která je skloněna pod úhlem 45 stupňů (z roviny je zde nakreslen jen obdélníkový výřez). Hory (nebo jejich části), které jsou pod rovinou, jsou znázorněny různými odstíny modré, zatímco části, které se za chvíli objeví nad rovinou, budou zbarveny do šeda (od světlé po tmavou). Průsečík roviny a povrchu kuželů bude zvýrazněn červenou barvou.

Stiskněte knoflík [**Vpřed**] a sledujte pohyb roviny. Rovina postupně odhaluje části kuželů. Počkejte až bude zhruba v polovině pohoří a stiskněte knoflík [**Stůj**]. Poté, co si obrázek pozorně prohlédnete, stiskněte knoflík [**Vertikální**]. Pohoří protnuté rovinou se natočí do polohy, kterou známe z minulé scény, kdy se na kužely díváme vertikálně shora ve směru rovnoběžném s jejich osami.

Po natočení průsečík zametací roviny a vodorovné roviny míst bude představovat zametací přímku z předchozích 2D scén. Jistě si na první pohled všimnete, že tento průsečík (nebo přesněji jeho průmět do roviny míst - tedy tak, jak je nakreslen na displeji) je pobřežní čára, která byla vidět v předcházejících scénách. Body roviny, které jsou na jih od pobřežní čáry z předchozích 2D scén jsou vlastně průměty těch bodů na povrchu pohoří, které jsou *nad* zametací rovinou v 3D scéně, body roviny severněji od pobřežní čáry z předchozích 2D scén (ať jsou v jakékoli poloze k zametací přímce), jsou body na povrchu pohoří, které jsou *pod* zametací rovinou v 3D scéně.

První okamžik, kdy zametací rovina narazí na kužel nějakého místa je okamžik, kdy narazí na vrchol kužele a zároveň se kužele dotýká ve spádnici, která z vrcholu běží přímo k jihu.

Nyní je také jasné, jak je pobřežní přímka konstruována: jako průmět průsečíku pohoří a zametací roviny se skládá z průmětů viditelných částí průsečíků jednotlivých kuželů a zametací roviny. Jelikož je zametací rovina rovnoběžná se spádovou přímkou kužele, jsou tyto průsečíky paraboly a snadno se zjistí, že jejich průměty do vodorovné roviny jsou také paraboly. Pobřežní přímka v 2D scénách je tedy skutečně složena z parabolických oblouků.

Údolí pohoří kuželů jsou tvořena body, jejichž průměty vytvoří hranice oblastí Voronoi diagramu v 2D. Tyto body jsou také místa, kde se stýkají viditelné části průsečíků zametací roviny s kužely, ohraničujícími údolí. Tím je tedy dáno, proč body v 2D reprezentaci, ve kterých se stýkají oblouky pobřežní čáry, "kreslí" hranice Voronoi oblastí: jsou to přesně průměty bodů údolí.

Scéna: *Paraboly jednotlivě*

V předchozí scéně jsme objasnili význam pobřežní čáry pomocí 3D konfigurace. V této a následujících scénách vyložíme význam pobřežní čáry ještě jednou, ale na základě rovinného nákresu. I zde ale se vyskytnou kuželosečky, nikoli jako průsečík kužele a roviny, ale jako množina bodů stejně vzdálených od bodu a přímky.

Jak jsem již řekl výše, algoritmus se snaží zkonstruovat tu část Voronoi diagramu, kterou lze určit na základě znalosti míst, které již přešla (nebo se jich alespoň dotkla) zametací přímka. Takovým místům budeme říkat *známá místa*, místa, která leží v tmavé severní oblasti, kterou zametací přímka ještě neprošla, budou *neznámá místa*.

Na obrázku jsou znázorněna všechna místa a zametací přímka. Klepněte na jedno známé místo. To se tím zvýrazní a objeví se růžová oblast, shora ohraničená parabolou. Hraniční parabole je množina všech bodů, které jsou stejně daleko od zvoleného místa a od zametací přímky (v okamžité poloze). Je známo, že taková křivka je parabola, která má *ohnisko* ve zvoleném místě; zametací přímka je *řídící přímka* této paraboly. Parabola je otevřena směrem k jihu a body růžové oblasti jsou ty body, ze kterých je blíže do ohniska paraboly než k její řídící přímce, zatímco body, které nejsou růžové a neleží na parabole jsou (bez ohledu na jejich polohu vůči zametací přímce) blíže k řídící přímce paraboly než k jejímu ohnisku.

Povšimněte si, že na sever od ohniska prochází parabola pochopitelně bodem, který je v polovině mezi ohniskem a řídící přímkou.

Zvolte myší libovolné jiné zvolené místo, opětně se zobrazí parabola a růžová oblast bodů bližších ohnisku než řídící přímce. Řídící přímkou lze pohybovat pomocí knoflíků jako v minulých scénách. Pohyb se zastaví, pokud by se zvolené místo dostalo na sever od zametací přímky (mezi neznámá místa). Pohyb zametací přímky myší je blokován, aby nebyl v kolizi s volbou míst myší.

Je dobré, abyste sledovali změnu tvaru paraboly při pohybu zametací přímky, tvořící řídídí přímku paraboly. Pokud se řídící přímka vzdaluje od ohniska směrem k severu, parabola se pohybuje za ní a výrazně se rozevírá, naopak pokud je řídící přímka blízko ohniska, parabola je úzká.

Když ohnisko (tedy zvolené místo) leží na řídící přímce, množina bodů, které jsou stejně vzdáleny od ohniska a od řídící přímky, není parabola, ale přímka procházející ohniskem a kolmá na řídící přímku. I tento případ bude při výpočtu podle Fortunova algoritmu důležitý a nastává při t.zv. místní události. Nás z uvedené přímky bude zajímat pouze její část (polopřímka) z ohniska na jih. Výše uvedená růžová oblast je nyní prázdná; když ohnisko leží na řídící přímce, žádný bod nemůže být blíže k ohnisku než k přímce.

Poznamenejme, že vše v této scéně by bylo možno zobrazit i v 3D provedení. Degenerovaná situace popsaná v předchozím odstavci by pak spočívala v tom, že zametací rovina zahrnuje vrchol kužele a dotýká se jeho povrchu v jediné přímce, zatímco v základní situaci zametací rovina kužel prosekává.

Scéna: *Paraboly společně*

V této scéně jsou nakresleny současně všechny paraboly známých míst, které byly popisovány v předchozí scéně. Růžově je vykreslena oblast zahrnující body, které jsou v růžové oblasti pro alespoň jedno známé místo. Jsou to přesně ty body, ze kterých je do některého známého místa blíže než k zametací přímce.

Červeně jsou nakresleny body, které jsou na parabole alespoň jednoho známého místa, ale pro žádné známé místo nepatří do jeho růžové oblasti. Jsou to body, které mají do nejbližšího známého místa stejně daleko jako k zametací přímce. Je jasně vidět, že tato množina je pobřežní čára, o které jsme mluvili v předchozích scénách.

Ostatní body jsou pak pochopitelně ty body, ze kterých je k zametací přímce blíže, než k nejbližšímu známému místu, a to bez ohledu nad to, v jakém vztahu jsou k zametací přímce. Jsou to tedy body na sever od pobřežní čáry.

Scéna: *Pobřežní čára*

Jak už bylo řečeno výše, body na pobřežní čáře a na jih od ní jsou ty, pro které už je možno určit jejich zařazení do budovaného Voronoi diagramu. Jelikož se pobřežní čára posunuje směrem k severu, je zřejmé, že k zařazení bodu dojde v okamžiku, kdy se dostane na pobřežní čáru. Při dalším postupu se dostane na jih od ní a tam již setrvává, aniž by se na jeho postavení cokoli měnilo. Rozebereme proto situaci bodů ležících na pobřežní čáře. Takový bod x se nachází v jednom ze dvou následujících postavení:

- Bod x leží uvnitř některého parabolického oblouku. V tomto případě leží na parabole jednoho známého místa s a pro všechna další známá místa leží na sever od jejich parabol. Pak je k místu s stejně daleko jako k zametací přímce a tedy blíže než k libovolnému neznámému místu a také blíže než k libovolnému jinému známému místu. Znamená to, že bod x patří dovnitř oblasti místa s.

- Bod x je bod, kde se stýkají dva parabolické oblouky pobřežní čáry, které jsou částmi parabol s ohnisky s_1 a s_2. Pak je z bodu x do místa s_1 stejně daleko jako k zametací přímce, ale do místa s_2 je z x také stejně daleko jako k zametací přímce. Z toho plyne, že z bodu x je stejně daleko do s_1 jako do s_2. Protože bod x leží na pobřežní čáře, neleží navíc v růžové oblasti žádného známého místa. Pro libovolné známé místo s je tedy do s alespoň tak daleko jako k přímce, což je ale současně vzdálenost do s_1 i s_2. Místa s_1 a s_2 jsou tedy dvě nejbližší místa bodu x a proto bod x náleží hraniční úsečce nebo polopřímce Voronoi diagramu.

Z toho co bylo právě řečeno o bodu styku dvou oblouků pobřežní čáry plyne, že dělící body Voronoi diagramu jsou právě ty body, které se někdy v průběhu výpočtu na okamžik staly takovými body styku. To znamená, že body styku "kreslí Voronoi diagram".

Poznamenejme, že pokud bod x je bodem styku dvou oblouků, může se stát, že existuje více nejbližších míst bodu x než jen ohniska těchto oblouků. Typicky tato situace nastává při t.zv. kružnicové události (viz dále), kdy bod navíc leží na parabole dalšího známého místa, která v okolí bodu probíhá jižněji než jeden nebo druhý z oblouků. Může ale vzácně nastat i jinak, například když bod leží v místě styku dvou parabol míst, které jsou jižně od zametací přímky, ale současně přímo na sever od bodu leží na zametací přímce další místo. Tuto a další degenerované situace probereme v závěru kapitoly.

Scéna: *Události*

Tvar pobřežní čáry se při jejím pohybu k severu neustále mění, ale počet oblouků a jejich rozložení se mění jen málokdy. Okamžiky, kdy se se pobřežní čára mění radikálním způsobem, nazýváme *události*. Tato scéna umožňuje animovat posun pobřežní čáry knoflíky [**Nahoru**] a [**Dolů**], ale pohyb se automaticky zastaví nejen pomocí knoflíku [**Zastavit**], ale i v okamžiku, kdy dojde k události.

Zkuste si pohyb zametací přímky k severu nebo jihu a sledujte přitom, při jakých událostech se poyb zastaví. Uvidíte, že (za předpokladu, že se zametací přímka pohybovala k severu) nastává jeden ze dvou případů:

- **Místní událost:** Zametací přímka právě narazila na další místo (odtud název). V pobřežní čáře se objevil se nový "oblouk", ve skutečnosti úsečka, která je částí polopřímky, představující degenerovanou parabolu nového známého místa, ležícího zatím na zametací přímce. Tím došlo k rozetnutí oblouku ležícího pod nově objeveným místm na dvě části.

- Kružnicová událost Jeden z oblouků pobřežní čáry byl “utlačován” dvěma sousedními oblouky, jeho šířka se postupně zmenšovala a právě v tomto okamžiku zcela zmizel. (Název události bude objasněn později).

Velmi vzácně může docházet i k některým jiným událostem, které obvykle lze chápat jako současný výskyt dvou nebo více jednoduchých událostí, jako je třeba současné vymizení dvou sousedních oblouků v týž okamžik a v témže bodě roviny nebo místní událost, při které polopřímka spuštěná z nově nalezeného místa protne pobřežní čáru nikoli uvnitř oblouku, ale v místě styku dvou oblouků, ale k jejich výskytu je třeba, aby množina míst zahrnovala některé speciální a málo časté konfigurace, ke kterým u náhodně zvolených míst v obecné poloze dochází jen zřídka, například čtyři nebo více bodů, ležících na téže kružnici. Tyto konfigurace probereme podrobněji na konci kapitoly.

Pohrajte si se scénou a sledujte situace, kdy dochází k událostem. Doporučuji ještě myší mírně posouvat v okolí polohy, kde k události došlo, pro prozkoumání konfigurace těsně před nebo těsně po události.

Scéna: *Místní událost*

Scéna přináší stejnou situaci i možnosti ovládání jako předchozí scéna, avšak pohyb zametací přímky se automaticky zastavuje pouze při místní události.

Prozkoumejme situaci v okamžiku místní události a těsně před ní a po ní trochu blíže. Těsně před místní událostí nic nenaznačuje, že by k ní mohlo dojít. Situace na sever od zametací přímky je neznámá a neexistuje žádná možnost jak zjistit, že se přímka blíží k neznámému místu.

V okamžiku, kdy došlo k události se na zametací přímce objevilo dosud neznámé místo. Do pobřežní čáry přibyla degenerovaná parabola tohoto místa. Předpokládajíce nedegenerovanou místní událost, tato polopřímka-parabola rozetnula některý z dosavadních oblouků pobřežní čáry na dvě části a vklínila se mezi ně. Průsečík je bod, ze kterého je stejně daleko do nového místa i ohniska rozetnutého oblouku a proto v něm začíná vznikat nový segment Voronoi diagramu, zatím představovaný jediným bodem, průsečíkem.

Posunujte nyní myší zametací přímku velmi pomalu směrem k severu. Z degenerované paraboly se stala korektní parabola, která je nejprve velmi úzká, ale prudce se rozšiřuje. Průsečíky větví této paraboly se západní a východní částí rozetnutého oblouku se rychle vzdalují a kreslí ze dvou stran nově vznikající segment Voronoi diagramu. Směry pohybu průsečíků jsou navzájem opačné, protože se oba pohybují po ose úsečky spojující nové místo s ohniskem rozetnutého oblouku, na které musí ležet body stejně vzdálené od těchto dvou míst.

Z technického hlediska bývá při programování výhodné představovat si, že nově vznikající segment není kreslen obousměrně, ale že se ve skutečnosti jedná o dva segmenty, které oba začínají v bodě, kde degenerovaná parabola rozetnula oblouk pod ní. Tyto dva segmenty jsou pak jednosměrně kresleny dvěma průsečíky větví paraboly nového místa se západní a východní části rozetnutého oblouku. Zatrhněte checkbox [**Polopřímky**] pro ilustraci tohoto přístupu, kdy oba segmenty jsou kresleny jako šipky s explicitně vyznačeným počátečním bodem.

Scéna: *Kružnicová událost*

Zhruba řečeno je kružnicová událost zánik některého oblouku pobřežní čáry při kterém se dotknou oblouky, které s ním po obou stranách sousedily. Obrazně je možno říci, že oblouk zahynul v důsledku expanze svých sousedů.

Na rozdíl od místní události se kružnicová událost dá předpovědět dopředu, pomineme-li fakt, že ještě těsně předtím, než k ní dojde, může nastat jiná událost, která celou situaci změní natolik, že k předvídané kružnicové události nakonec nedojde. Může například dojít k místní události, při které se objeví dosud neznámé místo, jehož parabola rozetne uvažovaný oblouk dříve než stačí zaniknout kružnicovou událostí. Mohou také zaniknout oblouky, které s obloukem původně určeným k vymizení sousedily (což většinou vede k tomu, že jsou nahrazeny jinými oblouky, kvůli nimž uvažovaný oblouk zmizí ještě dříve než se očekávalo, tedy ovšem v důsledku jiné události než se očekávalo).

Nechte zametací přímku postupovat (knoflík [**Vpřed**] nebo [**Vzad**]) až se zastaví v okažiku, kdy došlo ke kružnicové události a potom ji vraťte o něco zpět k začátku výpočtu.

Situaci nyní vidíme krátce předtím, než dojde ke kružnicové události během níž má vymizet jistý oblouk α s ohniskem s_α tím, že jej vytlačí jeho sousední oblouky β a γ s ohnisky s_β a s_γ. Přímky, které jsou osy úseček $s_\alpha - s_\beta$ a $s_\alpha - s_\gamma$, po kterých se pohybují styčné body dvojic oblouků (α, β) respektive (α, γ), se protínají někde v bodě, do kterého pobřežní čára zanedlouho dorazí. Do průsečíku přímek tedy směřují krajní body oblouku α, v něm se setkají a v něm zmizí.

Nechte přímku znovu doběhnout k uvažované kružnicové události a zatrhněte checkbox [**Paraboly**]. Objeví se úplně vykreslené paraboly míst s_β a s_γ, které nesou oblouky β a γ, jež zahubily oblouk α. Průsečíkem, ve kterém oblouk α úplně zmizel, ale také ještě prochází parabola s ohniskem s_α, protože oblouk α je vlastně stále ještě součástí pobřežní čáry, i když zdegeneroval do jediného bodu. Bod c, kde oblouk α zmizel, tedy leží na třech parabolách s ohnisky α, β a γ.

Z uvedeného plyne, že vzdálenosti z průsečíku c do všech tří bodů s_α, s_β a s_γ jsou stejné jako vzdálenost z c k zametací přímce. Z toho plyne, že kružnice se středem v c a procházející bodem s_α prochází také body s_β a s_γ a zametací přímka se této kružnice v okamžiku vymizení oblouku α shora dotýká. Pro zobrazení této kružnice zatrhněte checkbox [**Kružnice**].

Teď již tedy je jasné, jak dopředu určit zda, kde a kdy zanikne oblouk α se sousedními oblouky β a γ:

1. proložíme body s_α, s_β a s_γ kružnici; zánik oblouku α lze očekávat, pokud střed této kružnice leží v místě, kam pobřežní čára teprve dorazí;

2. pokud k zániku oblouku α dojde, stane se tak ve středu uvedené kružnice;

3. pokud k zániku oblouku α dojde, stane se tak v okamžiku, kdy se bude zametací přímka shora dotýkat sestrojené kružnice, neboli když y-ová souřadnice bodů zametací přímky bude o r větší než y-ová souřadnice středu kružnice, kde r je poloměr kružnice.

Role kružnice při předvídání kružnicové události objasňuje její název.

Pro plánování výpočtu si algoritmus vede *kalendář událostí*. Místní události jsou reprezentovány příslušnými místa a jsou řazeny podle y-ové souřadnice míst, které udávají, kdy na ně zametací přímka narazí. Jsou do kalendáře vloženy hned na začátku výpočtu. Kružnicové události se zařazují vždy, kdy dojde na pobřežní čáře ke změně, v důsledku které je možno očekávat, že ke kružnicové události dojde. Obsahují údaje o zúčastněných obloucích, jejich ohniscích, poloměru a středu kružnice a jsou do kalendářové fronty řazeny podle y-ové souřadnice nejvyššího bodu kružnice, který udává polohu zametací přímky v okamžiku, kdy k nim dojde.

Kromě toho je k obloukům, jichž se kružnicové události týkají, přiřazen odkaz na událost, aby v případě, že dojde k předčasné destrukci oblouku, mohla být s ním svázaná kružnicová událost vyjmuta z fronty nebo označena za neplatnou.

Scéna: *Degenerovaná událost*

Tato scéna umožňuje ukázat 8 různých konfigurací, při jejichž zpracování dochází k zvláštním situacím, které nazýváme degenerované. Konfigurace se volí na ovladači volbou [**Příklad xx**]. Po provedení volby používejte knoflík [**Vpřed**] pro animaci výpočtu, který se zastavuje na všech událostech.

V Příkladu 0 existují dvě nejjižnější místa. Spusťte animaci. Když zametací přímka dorazí do těchto míst, bude pobřežní čára tvořena dvěma navzájem oddělenými rovnoběžnými polopřímkami směřujícími k jihu, ale neprotínajícími se. Po posunu zametací přímky o infinitezimálně malý kousek k severu se z polopřímek stanou dvě standardní paraboly, jejichž *jediný* průsečík se rychle přibližuje z nekonečna, jak zametací přímka postupuje k severu. Toto je jediný případ, kdy je polopřímka patřící do Voronoi diagramu kreslena “od nekonečna”. Kreslení polopřímky je ukončeno kružnicovou událostí krátce poté, kdy zametací přímka narazí na další místo.

Když v Příkladu 1 zametací přímka narazí na nejsevernější místo, pak dojde současně ke dvěma událostem: místí událost nalezení zmíněného místa a kružnicová událost, při které se setkají dva oblouky pobřežní čáry. Tyto dvě události se navzájem neovlivňují a mohou být zpracovány postupně v libovolném pořadí.

V Příkladu 2 proběhne místní událost, která odpovídá nejsevernějšímu místu, zvláštním způsobem. Polopřímka spuštěná z tohoto místa (degenerovaná parabola) neprotne žádný ze dvou oblouků pobřežní čáry, ale strefí se přímo do jejich průsečíku. V takovém případě končí v průsečíku segment, který byl kreslen průsečíkem zmíněných oblouků a začnou se kreslit dva nové segmenty Voronoi diagramu, určené průsečíky parabolického oblouku nového místa s původními dvěma oblouky. Tato událost musí být ošetřena zvláštním způsobem.

Příklad 3 je obdobný, ale současně s místní událostí pro severní místo dojde ke kružnicové události. V tomto případě by měla být nejprve zpracována kružnicová událost a oblouk odpovídající nejjižnějšímu místu odstraněn z pobřežní čáry a pak teprve událost místní.

V Příkladu 4 dojde současně ke dvěma kružnicovým událostem a zmizí dva sousední oblouky. Události lze zpracovat postupně v libovolném pořadí.

V Příkladu 5 leží všechna místa na jedné přímce. Takováto konfigurace, která musí být ošetřena zvlášť, vede k tomu, že Voronoi diagram bude tvořen $n-1$ rovnoběžnými přímkami (kde n je počet míst), které rozdělí rovinu do dvou polorovin oddělených $n-2$ pásy nekonečné délky.

Příklad 6 je podobný, ale všechna místa mají stejnou y-ovou souřadnici. Voronoi diagram bude opět tvořen $n-1$ rovnoběžnými přímkami, dvěma polorovinami a $n-2$ pásy. Tato konfigurace musí být ošetřena zvlášť a jinak než v předchozím případě.

Nakonec Příklad 7 sice nepřináší nic nového, ale dojde v něm současně k 9 kružnicovým událostem, při nichž zmizí 9 sousedících oblouků a současně k místní události, jejíž spuštěná polopřímka se strefí do místa, kde zmizely oblouky. I přes svoji složitost se kombinovaná událost zpracuje snadno provedením kružnicových událostí v libovolném pořadí, následovaných místní událostí.

Scéna: *Vyhledávání oblouku*

Jestliže je množina míst velká a je rozložena do šířky, může se stát, že pobřežní čára obsahuje velké množství oblouků. Pak se stane výpočetně značně zdlouhavou tak jednoduchá operace, jako je určení oblouku, který se nachází pod novým známým místem při kružnicové události.

Nejjednodušší způsob jak takový oblouk nalézt je procházet pobřežní čáru zleva doprava, pro každý oblouk si určit x-ové souřadnice jeho konců a jejich porovnáním s x-ovou souřadnicí nového místa určit, zda se jedná o hledaný oblouk.

Uvedený postup by ale u pobřežní čáry složené z mnoha oblouků mohl být příliš pomalý. Pak je výhodné si nad pobřežní čárou vytvořit binární vyhledávací strom tak, jak je to ilustrováno v této scéně. Listy stromu (oranžová kolečka) odpovídají obloukům čáry a vnitřní vrcholy stromu (šedá kolečka) odpovídají styčným bodům oblouků (v nákresu vnitřní uzel stromu leží vždy nad odpovídajícím průsečíkem oblouků). V každém vnitřním bodě je uložena informace o ohniskách oblouků, které se v odpovídajících styčných místech potkávají (přičemž je poznamenáno, které ohnisko odpovídá levému oblouku a které pravému). Příslušnost vrcholů stromu obloukům nebo jejich průsečíkům je znázorněna oranžovými nebo šedivými svislými čarami (které nejsou součástí stromu, jen ilustrují logickou souvislost prvků pobřežní čáry s uzly stromu). Svislé čáry je možno skrýt volbou na ovladači, která umožňuje i skrýt celý strom. Hrany stromu jsou kresleny zeleně.

Vyhledávání ve stromě začíná v jeho kořenu a v každém vnitřním uzlu pokračuje následujícím způsobem:

pro danou polohu zametací přímky (řídící přímky parabol nesoucích oblouky pobřežní čáry) se ze znalosti poloh ohnisek oblouků, nad jejichž průsečíkem se uzel nachází, určí rovnice parabol, kterých jsou oblouky částí. Rovnost rovnic parabol vede na kvadratickou rovnici, z níž se určí souřadnice styčného bodu oblouků. Porovnáním x-ových souřadnic styčného bodu a nového známého místa odkrytého při místní události se určí, zda ve stromě postupovat do levého či pravého syna (a ve vzácných případech se může stát, že nové místo je nad průsečíkem oblouků).

Uvedeným postupem v nedegenerovaném případě sestoupíme až do listu, který odpovídá hledanému oblouku.

Při místní události je do stromu třeba přidat dva listy a dva vnitřní vrcholy (při degenerované místní události po jednom) a při kružnicové události je zase třeba jeden list a jeden vnitřní vrchol odebrat. Tyto operace zde nebudeme podrobně rozebírat; zkuste si obvyklým způsobem pohybovat zametací přímkou a sledovat změny ve stromu nad pobřežní čárou.

Jako obvykle může nastat, že se strom nad pobřežní čárou stane nevyváženým a jeho hloubka bude příliš veliká. Abychom tomu předešli, můžeme použít obvyklé způsoby vyvažování, které byly uvedeny v kapitole o stromových datových strukturách. V appletu však vyvažování pro jednoduchost použito není.

Scéna: *Určování nejbližšího bodu*

Základní aplikací Voronoi diagramu je problém najít pro danou množinu míst a zadaný bod x roviny to místo, které je bodu x nejbližší. Velice často je množina míst pevná a nemění se a dotazů na nejbližší místo se provádí velké množství. V takovém případě je vhodné informaci o množině míst předem zpracovat tak, aby potom dotazy na nejbližší místo byly zpracovávány co nejrychleji.

V takovém případě lze postupovat následujícím způsobem:

nejprve se sestrojí Voronoi diagram tak jak je ukázán na obrazovce a všemi koncovými body segmentů Voronoi diagramu se proloží svislé přímky. Vyberte volbu [**Svislé přímky**], aby se tyto přímky znázornily.

Přímky rozdělí rovinu do svislých pruhů, které jsou samy segmenty Voronoi diagramu rozsekány do lichoběžníkových oblastí (v některých případech tento lichoběžník degeneruje na trojúhelník, v dalším ale budeme mluvit jen o lichoběžnících).

Vyberte volbu [**Jeden pruh**] pro zvýraznění lichoběžníkových oblastí jednoho pruhu; klepnutím myší postupně volte různé pruhy a sledujte jejich rozdělení do oblastí. Nakonec zvolte [**Všechny pruhy**] pro zvýraznění všech lichoběžníkových oblastí.

Způsob, jak byly lichoběžníkové oblasti zkonstruovány vede k tomu, že každá je *celá* částí spádové oblasti jistého místa a tedy všechny vnitřní body lichoběžníka mají totéž nejbližší místo. Totéž místo je i nejbližším místem bodů na obvodu lichoběžníka, na rozdíl od vnitřních bodů však nemusí (i když může) být jediným nejbližším místem. Podobně vnitřky úseček, které tvoří obvod lichoběžníka mají stejnou informaci o nejbližším místu nebo místech; takové místo může být jedno nebo dvě a zahrnují místo nejbližší vnitřním bodům, ale tato informace je stejná pro celý vnitřek úsečky. Nakonec ještě můžeme zjistit informaci o nejbližších místech vrcholů lichoběžníka. Pokud nás zajímá jen alespoň jedno nejbližší místo a nikoli přesná informace o všech nejbližších místech dotazovaného bodu, stačí si pro celý lichoběžník pamatovat jen základní nejbližší místo určené pro vnitřek.

Pro daný bod stačí určit lichoběžník, ve kterém leží a přečíst informaci s lichoběžníkem spojenou. K tomu si napřed určíme svislý pás, ve kterém leží, což lze provést velmi efektivně půlením. Předpokládejme, že $x_1, \dots, x_\ell$ jsu x-ové souřadnice svislých přímek ohraničujících pásy a uspořádané vzestupně. Nejprve porovnáme x-ovou sořadnici dotazovaného bodu s číslem $x_{\ell/2}$; podle toho zda leží nalevo či napravo od mediánové svislé přímky souřadnici porovnáme s číslem $x_{\ell/4}$ nebo $x_{3\ell/4}$ atd. a po nejvýše $\lceil \log_2 \ell \rceil$ krocích identifikujeme pás, do kterého bod patří.

Pro každý pás zvlášť je potom třeba vytvořit podobné dotazovací schéma, ve kterém místo svislých přímek vystupují kosé segmenty, dělící pás do lichoběžníků. Dotazy jsou zde o něco komplexnější než v případě svislých přímek, ale půlením pásu (dle počtu lichoběžníků) lze hledaný lichoběžník nalézt opět v čase úměrném logaritmu počtu lichoběžníků v pásu.

Scéna: *Delaunayova triangulace*

Nakonec ještě ukážeme Delaunayovu triangulaci množiny bodů v rovině. Jedná se vlastně o duální graf k grafu představovaném Voronoi diagramem. Stručně řečeno dvě místa se spojí modrou čarou, pokud jejich Voronoi oblasti mají společnou stěnu (jeden společný bod nestačí).

Pokud Voronoi diagram nemá body, ze kterých vychází čtyři nebo více segmentů diagramu, pak modré čáry Delaunayova diagramu rozdělí rovinu do trojúhelníkových oblastí a proto obvykle mluvíme o triangulaci.

Zatrháváním checkboxů [**Voronoi**] a [**Delaunay**] můžeme zobrazovat a skrývat oba diagramy. Zobrazte si je současně a ujistěte se, že byste uměli nakreslit Delaunayovu triangulaci na základě Voronoi diagramu.

Tato scéna je uvedena spíše pro informaci, blíže konstrukci Delaunayovy triangulace, její vlastnosti a aplikace rozebírat nebudeme.

Scéna: *Původní Fortunův algoritmus*

V původním článku Steve Fortune popsal algoritmus hledání diagramu v jiné podobě. K jejímu objasnění si znovu ukážeme 3D situaci. Pohoří tvořené kužely míst se nejprve ukáže tak jak tomu bylo ve výchozí poloze scény “Kužely”, tedy při pohledu shora. Ihned se ale začne naklápět “hlavou dolů”, ale pohyb se zastaví po naklopení o 45 stupňů. Nakonec se tedy na kužely díváme ve směru jižních spádnic kuželových hor (ale z nekonečna nebo alespoň velké dálky, abychom potlačili perspektivu). Tento úhel pohledu má jednu výhodu a jednu nevýhodu.

Výhodou je to, že se díváme ve směru zametací roviny, jak byla ukázána ve scéně “Zametací rovina”, takže ta se jeví jako přímka, do které se promítá vše, co v rovině leží. Mezi jiným se do ní promítne i celá pobřežní čára, protože ta je vlastně průsečíkem zametací roviny a povrchu pohoří a jako taková tedy je součástí zametací roviny.

V původní verzi Fortunova algoritmu tedy nebyla oddělená zametací přímka a pobřežní čára a také odpadla mrtvá oblast mezi zametací přímkou a pobřežní čarou, která sice už ležela v “zametené” oblasti, ale ještě mohla být ovlivněna místy, kterých se zametací přímka ještě nedotkla. Jednalo se tedy o čistý zametací algoritmus, jak je znám z jiných problémů ve výpočetní geometrii.

Na druhé straně tvar segmentů a oblastí Voronoi diagramu přestal být přímkový. Ve 3D zobrazení vidíme, že Voronoi segmenty, oddělující oblasti jednotlivých míst ve skutečnosti nejsou úsečky, ale hyperbolické oblouky, vzniklé protnutím dvou kuželových ploch s rovnoběžnými osami. Jako úsečky se pouze jeví při pohledu shora, jak jsme to činili většinu této kapitoly. Původní Fortunův směr pohledu ale není svislý a hyperbolické křivky se nepromítají jako úsečky, ale jako skutečné křivky. Voronoi oblasti míst jsou proto zvláštním způsobem zkreslené.

Důležité je, že jižní spádnice kuželů se jeví jako body a proto se každé místo jeví jako nejnižší bod své oblasti. Proto je libovolné místo prvním bodem celé své oblasti, na který zametací přímka narazí a tedy v okamžiku, kdy máme začít kreslit oblast nějakého místa, máme informaci o tomto místu k dispozici. Na rozdíl od toho při pohledu shora zametací přímka přechází přes řadu míst Voronoi oblasti dříve, než narazí na místo, které oblast určuje.

Mohlo by se zdát, že popis výpočtu Fortunova algoritmu v původním provedení musí být mimořádně náročný, protože segmentyjsou tvořeny složitými křivkami. Ve skutečnosti ale potřebujeme znát pouze koncové body segmentů, které určíme při místních a kružnicových událostech a průběh křivky mezi nimi je nepodstatný. Na konci výpočtu se všechny koncové body segmentů přetransformují do svislého směru pohledu a propojí úsečkami.

Ovladač umožňuje snadno překlápět pohoří z vertikálního pohledu do Fortunova směru pohledu knoflíky [**Vertikální**] a [**Fortune**] pro objasnění vztahu původní a zde vykládané podoby algoritmu.