Matice $A = (A_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ řádu $n \times m$ je v odstupňovaném tvaru, pokud existuje číslo $h$ nazývané *hodnost* matice $A$, takové, že platí

- $A_{ij} = 0$ pro každá celá čísla $i$ a $j$ taková, že $h < i \leq n$ a $1 \leq j \leq m$,
- označíme-li pro každé $i$ takové, že $1 \leq i \leq h$ jako $p_i$ nejmenší číslo $j$ takové, že $A_{ij} \neq 0$, pak $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$.

Definice: *Pivot* $i$-tého řádku matice $A = (A_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ je nejmenší číslo $j$ takové, že $A_{ij} \neq 0$.

Pokud obsahuje řádek matice samé nuly, pak jeho pivot neexistuje, ale nenulový řádek pivota vždy má. Podmínka z definice odstupňované matice říká, že pivoty řádků $1, \dots h$ existují a tvoří ostře rostoucí posloupnost.

**Gausova eliminace**

Je dána soustava $n$ lineárních rovnic (psána programátorským a nikoli matematickým způsobem)

$$a[1,1] * x[1] + \cdots + a[1,m] * x[m] = b[1]$$
$$\dots$$
$$a[n,1] * x[1] + \cdots + a[n,m] * x[m] = b[n]$$

a máme ji převést do odstupňovaného tvaru elementárními úpravami (t.j. násobení řádku nenulovým číslem nebo přičtení nenulového násobku jednoho řádku k jinému).

Používáme pomocné celočíselné proměnné $r$ (ukazuje řádky) a $s$ (ukazuje sloupce).

**begin**
$r := 1$; $s := 1$;
**while** $r \leq n$ and $s \leq m$ **do begin**
    **if** $a[r,s] = a[r+1,s] = \cdots = a[n,s] = 0$ **then** $s := s+1$;
    **else begin**
        **if** $a[r,s] = 0$ **then** urči $k > r$ takové, že $a[k,s] \neq 0$ a
            přičti $k$-tý řádek k $r$-tému
        vyděl $r$-tý řádek číslem $a[r,s]$;
        **for** $k = r+1$ **to** $n$ **do**
            přičti $(-a[k,s])$-násobek $r$-tého řádku ke $k$-tému řádku;
        $r := r+1$; $s := s+1$;
        **end**
    **end**
**end**

Napřed ukážeme, že se výpočet vždy zaastaví a za jak dlouho se zastaví:

Tvrzení T1: while cyklus se provede nejvýše $m$ krát.

Důkaz: Hodnota $s$ se v každém provedení while cyklu zvýší o 1, na začátku je 1 a na konci nejvýše $m + 1$.

Tvrzení T2: V jednom provedení while cyklu se provede nejvýše $n - r + 1$ testů nenulovosti čísla, nejvýše jedno vynásobení řádku nenulovým číslem (zahrnujícího $m$ násobení) a nejvýše $n - r + 1$ přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku (zahrnujícího $m$ násobení a $m$ součtů), kde $r$ je hodnota této proměnné do vstupu uvažovaného provádění těla while cyklu. Důkaz je zřejmý.

Z tvrzení T1 a T2 ihned plyne, že se algoritmus musí zastavit a provede nejvýše $nm$ testů nenulovosti a nejvýše $(2n + 1)m^2$ sčítání a násobení.

Správnost algoritmu plyne z následujících tvrzení:

1. pokud $r > 1$, pak matice tvořená řádky $1, 2, \ldots, r-1$ je v odstupňovaném tvaru, má hodnost $r - 1$ a pivot $(r - 1)$-tého řádku je menší než $s$;

2. v každém okamžiku výpočtu je $a[k, \ell] = 0$ pro libovolné $k$ a $\ell$ takové, že $r \le k \le n$ a $1 \le \ell < s$.

Dokážeme, že tato tvrzení platí po celou dobu výpočtu:

Na začátku, kdy $r = 1$ platí první tvrzení z triviálních důvodů a jelikož i $s = 1$, ani druhé tvrzení po žádném prvku matice nic nepožaduje.

žádná z elementárních operací, prováděných ve while cyklu neoperuje s řádky $1, 2, \ldots, r-1$ a proto ponechává matici tvořenou těmito řádky v odstupňovaném tvaru, se stejnou hodností i pivoty. Jelikož navíc v řádcích $r, r + 1, \ldots, n$ je prvních $s - 1$ sloupců zleva nulových, žádné elementární operace v této oblasti nemohou vytvořit nenulová čísla a proto druhé= tvrzení zůstává též v platnosti.

Samostatné zvýšení $s$ v okamžiku kdy $a[r, s] = a[r + 1, s] = \cdots = a[n, s] = 0$ neovlivní první tvrzení, protože pivot $(r - 1)$-tého řádku zůstane stejný a proto menší než zvýšené $s$. Druhé tvrzení zůstane v platnosti také, protože se do oblasti, která má obsahovat nulové prvky, dostanou nově pouze prvky $a[r, s], a[r + 1, s], \ldots, a[n, s]$, o kterých víme, že jsou nulové.

Zbývá tedy současné zvýšení $r$ a $s$ o 1 ke konci while cyklu. Dochází k němu za situace, kdy v $r$-tém řádku jsou nuly ve sloupcích $1, \ldots, s - 1$ (z platnosti druhého tvrzení před zvýšením) v řádcích $r + 1, \ldots, n$ jou navíc nuly i ve sloupci $s$ (plyne to z úprav, které jsme provedli: do této větve if-then-else příkazu se dostaneme, pokud alepoň jedno z čísel $a[r, s], a[r + 1, s], \ldots, a[n, s]$ je nenulové, pokud $a[r, s] = 0$, pak nejprve zajistíme, aby bylo nenulové, pak vynásobením $r$-tého řádku zajistíme, aby bylo $a[r, s] = 1$ a pak následujícími úpravami dosáhneme toho, aby bylo $a[r + 1, s] = \cdots = a[n, s] = 0$).

Uvažujme tedy současné zvýšení $r$ a $s$ o 1 a označme jako $r_0$ a $s_0$ hodnoty těchto proměnných těsně před zvýšením. Zvýšení $r$ a $s$ vede k tomu, že v prvním tvrzení je třeba uvažovat matici, která obsahuje jeden řádek navíc - $r_0$-tý řádek. Víme ale, že pivot v tomto řádku je roven $s_0$, protože z druhého tvrzení víme, že v tomto řádku jsou prvky nalevo od $s_0$ nulové, a výpočet před zvýšením skončí tím, že ve sloupci $s_0$ je v tomto řádku 1. Navíc z platnosti prvního tvrzení před zvýšením $r$ plyne, že pivot v řádku $r - 1$ (spodní řádek matice uvažované v prvním tvrzení) existuje a je *menší* než $s_0$. Tím je dokázáno, že matice zahrnující prvních $r_0$ řádků (tedy $r - 1$ řádků po zvýšení $r$ na hodnotu $r_0 + 1$) bude také v odstupňovaném tvaru, s hodnotí rovnou počtu svých řádků, a pivotem spodního řádku rovným $s_0$, což je méně než hodnota proměnné $s$ po zvýšení.

Nakonec dokážeme, že po ukončení výpočtu z tvrzení plyne, že matice je v odstupňovaném tvaru a má hodnost $r_{term} - 1$, kde $r_{term}$ je konečná hodnota proměnné $r$. Jestliže totiž je $r_{term} = n + 1$, pak prvních $r_{term} - 1$ řádků uvažovaných v prvním tvrzení je celá matice a plyne to ihned z prvního tvrzení, v opačném případě je na konci $s = m + 1$, prvních $r_{term} - 1$ řádků matice v odstupňovaném tvaru podle prvního tvrzení a zbývající řádky jsou celé nulové podle druhého tvrzení a proto i celá matice je v odstupňovaném tvaru a hodnosti také $r_{term} - 1$.