13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x,y) = x_1y_2 + x_2$,
(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A,B) = AB$.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$
(b) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p,q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,
(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ (1-x)^2\}$,
(c) vyčíslete $b(1-x, x^2 - 2x + 2)$ dvěma různými postupy,
(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^TAx = x^TBx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.
(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

(a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.
(b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.