

## 11. Positivně (semi-)definitní matice

### Positivně definitní matice

**Cv. 11.1** Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

- (a) rekurentního vzorce,
- (b) Sylvestrova pravidla,
- (c) Gaussovy eliminace.

**Cv. 11.2** Otestujte pozitivní semidefinitnost resp. pozitivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,
- (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,
- (c)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Cv. 11.3** Buď  $A$  blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že  $A$  je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou pozitivně definitní.

Jak to bude s pozitivní semidefinitností?

**Cv. 11.4** Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování pozitivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro pozitivní definitnost a Choleského rozkladu.

### Positivně semidefinitní matice

**Cv. 11.5** Ověřte pozitivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

**Cv. 11.6** Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jsou pozitivně definitní.

- (a) Ukažte, že  $A + B$  jsou také pozitivně definitní.
- (b) Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitních matic?
- (c) Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitní a pozitivně definitní matice?

(d) Jak to bude s násobkem pozitivně definitních matic?

- Cv. 11.7** Najděte regulární matici, která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.
- Cv. 11.8** Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.
- Cv. 11.9** Nad symetrickými maticemi z  $\mathbb{R}^{n \times n}$  definujme relaci  $\preceq$  předpisem  $A \preceq B$  pokud  $B - A$  je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že  $\preceq$  je relace částečného uspořádání.
- Cv. 11.10** Buď  $A$  pozitivně semidefinitní. Ukažte, že pokud  $x^T A x = 0$  platí pro nějaké  $x \neq o$ , potom  $Ax = o$ .