

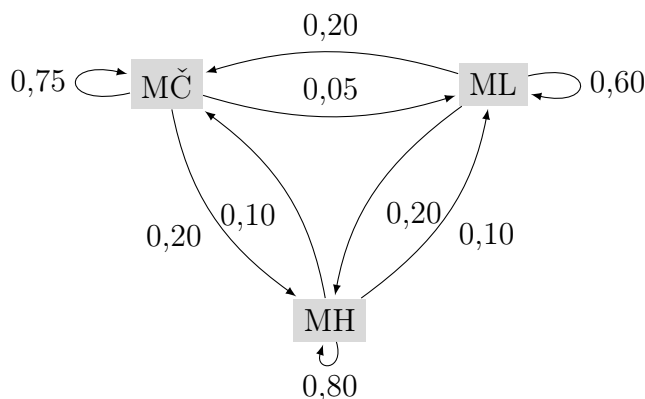
## 10. Vlastní čísla – metody výpočtu, odhady, Markovovy řetězce

### Markovovy řetězce a nezáporné matice

**Cv. 10.1** Ve městě Žebrácká Lhota fungují tři lokální politické strany, a to Moderní Čechy (MČ), Mír pro Lidi (ML) a Malé Hnutí (MH). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany MČ volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k ML přejde 5 % a k MH dokonce 20 %. Z voličů ML přejde k MČ rovných 20 % a k MH také 20 %. Nakonec, z voličů MH zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi MČ a ML. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

#### Řešení:

Pravidla pro volby v Žebrácké Lhotě ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici  $P$ , kde  $p_{ij}$  reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu  $j$  do stavu  $i$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,60 & 0,10 \\ 0,20 & 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice  $P$  tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu MČ do stavu MČ (75 % voličů opět volí stejnou stranu MČ), do stavu ML (5 % bude volit stranu ML) a do stavu MH (20 % volí stranu MH).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , vývoj situace v čase popisují stavy  $x_0, Px_0, P^2x_0, \dots, P^\infty x_0$ , kde  $P^\infty x_0$  označuje limitní stav  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$  (pokud existuje).

Diagonalizací (tj. spektrálním rozkladem) matice  $P$  dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S_{1*}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru  $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)^T$ , rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru 2 : 1 : 3.

Jelikož je matice  $P$  kladná, dominantní vlastní číslo 1 je jednoznačné a násobnosti jedna. Výsledné rozložení tak odpovídá složkám vlastního vektoru  $v = S_{*1}$ , který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru  $v \in \text{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$ .

**Cv. 10.2** Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25% látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

**Řešení:**

Podobně jako v předchozím cvičení sestrojíme přechodovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Její spektrální rozklad je

$$A = S \Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tudíž

$$A^\infty = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Množství látky v buňkách se tedy ustálí v poměru 1 : 2.

*Poznámka.* Protože matice  $A$  je kladná, víme, že dominantní vlastní číslo je jednoznačné a stačí pouze hledat příslušný vlastní vektor. Tím je vektor  $(1, 2)^T$  (druhý sloupec matice  $S$ ), který nám dá přímo hledaný poměr látek v ustáleném stavu.

**Cv. 10.3** Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte postupně takové matice  $A \geq 0$ , aby platily vlastnosti

- $\rho(A) = 0$ ,
- $\rho(A)$  je vícenásobné vlastní číslo,
- existuje vlastní číslo  $\lambda \neq \rho(A)$  takové, že  $|\lambda| = \rho(A)$ .

**Řešení:**

Toto je kreativní příklad, takže neexistuje kuchařka, jak takové matice najít. Řešením bude v každém bodě matice, která je nezáporná, ale obsahuje i nějaké nuly. Dobrými maticemi na testování jsou například Jordanovy buňky a blokově diagonální matice.

- například  $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

(b) například  $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

(c) například  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Odhady a techniky z výpočetních metod

**Cv. 10.4** Určete Gerschgorinovy disky pro matici

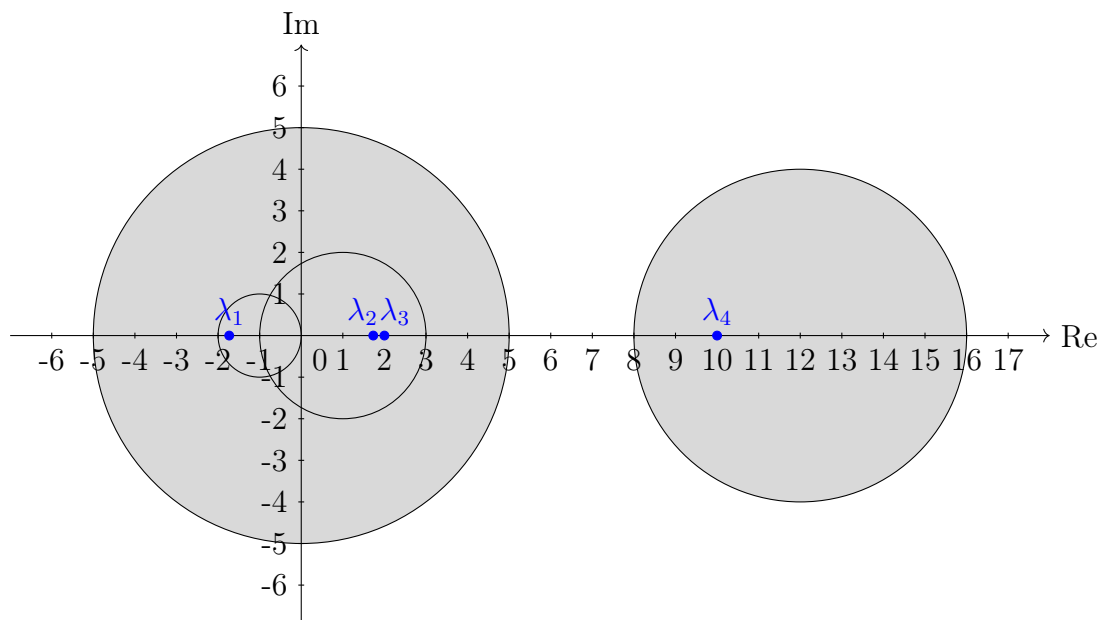
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice  $A$  aspoň dvě reálná vlastní čísla.

### Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice  $A$  leží v komplexní rovině v kruhu  $B(c_i, r_i)$  o středu  $c_i = a_{ii}$  a poloměru  $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  pro nějaké  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Pro zadanou matici  $A$  dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

střed  $c_1 = a_{11} = 1$ , poloměr  $r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2$ ,  
 střed  $c_2 = a_{22} = 12$ , poloměr  $r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4$ ,  
 střed  $c_3 = a_{33} = -1$ , poloměr  $r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1$ ,  
 střed  $c_4 = a_{44} = 0$ , poloměr  $r_4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5$ .



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu  $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$  tedy leží 3 vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  matice  $A$  a v kruhu  $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$  jedno vlastní číslo  $\lambda_4$ .

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo  $\lambda_4$  proto musí být reálné (jinak by v kruhu  $B(12, 4)$  muselo ležet i vlastní číslo  $\overline{\lambda_4}$ ). V kruhu  $B(0, 5)$  leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice  $A$  má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice  $A$  jsou  $\lambda_1 = -\sqrt{3}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{3}$ ,  $\lambda_3 = 2$  a  $\lambda_4 = 10$ .

**Cv. 10.5** Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

**Řešení:**

Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda některý z nich obsahuje počátek nebo ne. Disky ve tvaru  $B(c, r)$ , kde  $c$  je střed a  $r$  je poloměr, postupně jsou:  $B(10, 8)$ ,  $B(-7, 5)$ ,  $B(-5, 4)$  a  $B(7, 6)$ . Protože žádný z disků počátek neobsahuje, matice nemá vlastní číslo  $\lambda = 0$ , a proto je regulární.

**Cv. 10.6** Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda  $(I_4 - A^{-1})^k \rightarrow 0$  pro  $k \rightarrow \infty$ .

**Řešení:**

Nejprve sestrojíme Gerschgorinovy disky matice  $A$ . Protože matice  $A$  je symetrická, má reálná vlastní čísla a zajímají nás proto jen intervaly, kde Gerschgorinovy disky protnou reálnou osu. Všechny tyto průsečíky jsou částí intervalu  $[0.6, 15]$ , tudíž vlastní čísla matice  $A$  leží v intervalu  $[0.6, 15]$ . Matice  $A^{-1}$  má převrácené hodnoty vlastních čísel, její vlastní čísla se tak nachází v intervalu  $[1/15, 1/0.6] \subset (0, 2)$ . Vlastní čísla matice  $-A^{-1}$  potom patří do intervalu  $(-2, 0)$  a konečně vlastní čísla matice  $M := I_4 - A^{-1}$  leží v intervalu  $(-1, 1)$ ; viz cvičení 7.5(c). To znamená, že je  $\rho(M) < 1$ , a proto  $M^k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Cv. 10.7** Nejprve spočítejte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom aplikujte větu o deflaci vlastního čísla na to největší vlastní číslo.

**Řešení:**

Výpočtem zjistíme, že matice  $A$  má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a  $-2$ . Největšímu vlastnímu číslu  $\lambda_1 = 6$  odpovídá znormovaný vlastní vektor  $v_1 =$

$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$ . Deflací dostaneme matici

$$\begin{aligned} A' = A - \lambda_1 v_1 v_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tato transformace způsobila, že matice  $A'$  má stejná vlastní čísla a vlastní vektory, jako matice  $A$ , pouze vlastní číslo 6 se vynulovalo. Můžeme ověřit, že vskutku matice  $A'$  má vlastní čísla 0 (trojnásobné) a  $-2$  a stejné vlastní vektory jako matice  $A$ .