8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* jako relace.

Cv. 8.2 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Cv. 8.3 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Cv. 8.5 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \mathrm{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Cv. 8.6 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.