7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\mathrm{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

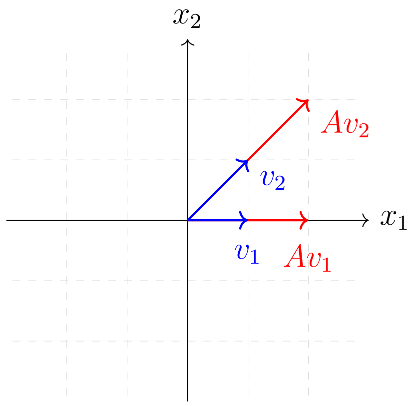
(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f.

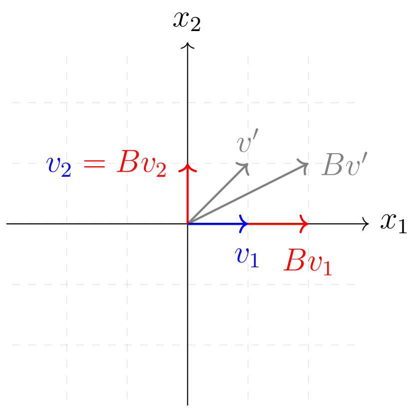


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



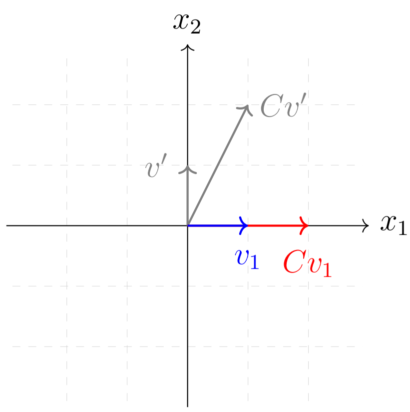
(c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1, protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f\left((\alpha, 0)^T\right) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

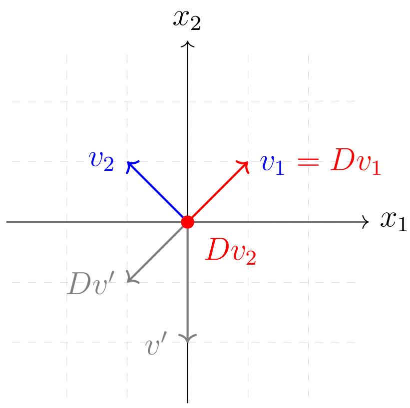
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



(d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D. Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.
Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou hodnoty $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = -7$.

Vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ najdeme jako bázi jádra matice $A - \lambda I_n$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 6 \\ 6 & -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. vektor $x_1 = (3,2)^T$. Podobně pro $\lambda_2 = -7$ hledáme bázi $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, tj. bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 6 \\ 6 & -3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tu tvoří např. vektor $x_2 = (2,-3)^T$.

Matice A má tedy vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (3,2)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = -7$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (2,-3)^T$. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně – každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

(b) Charakteristický polynom matice B je

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Tento polynom má pouze komplexní kořeny, a to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i.$$

Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 1 + i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1+i) & 1 \\ -2 & 2-(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra najdeme (stejně jako pro reálné matice) pomocí Gaussovy eliminace. Přičtením $(-1+i)$-násobku 1. řádku k 2. řádku dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+(-1-i)(-1+i) & 1-i+1(-1+i) \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+2 & 1-i-1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všechna řešení soustavy $(B - \lambda_1 I_2)x = 0$ jsou ve tvaru $z(1, 1+i)$ pro $z \in \mathbb{C}$. Hledaným vlastním vektorem je tedy např. vektor $x_1 = (1, 1+i)^T$.

Vlastní vektor x_2 pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1-i) & 1 \\ -2 & 2-(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix},$$

a je to např. vektor $x_2 = (1, 1-i)^T$.

Matice B má tudíž vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (1, 1+i)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (1, 1-i)^T$.

(c) Postupujeme obdobně jako u matic 2×2. Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \\ = (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\ - 2 \cdot (-3-\lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2-\lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2-\lambda) \\ = -(\lambda+1)^3. \end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3-(-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1,1,-1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1,1,-1)^T$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Charakteristický polynom matice A opět dostaneme jako determinant

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro vyjádření determinantu této matice je výhodné použít Laplaceův rozvoj, např. podle 2. řádku (obsahuje jediný nenulový prvek), následně podle 4. řádku a nakonec podle 3. sloupce. Tím dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2-\lambda)(1-\lambda)^3(1+\lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy 2, 1 (trojnásobné) a -1.

Cv. 7.4 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:
K řešení úlohy můžeme využít znalost vztahů mezi součinem vlastních čísel a determinantem matice, respektive mezi součtem vlastních čísel a stopou matice:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Výpočet determinantu je pracnější, ale i využití tohoto vztahu vede k řešení. Determinant matice A můžeme spočítat např. Gaussovou eliminací, dostaneme $\det(A) = -420$. Pro zbylé vlastní číslo potom platí

$$\det(A) = -420 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot \lambda_4,$$

tedy $\lambda_4 = -420/(-60) = 7$.

Výhodnější je ale použít vztah mezi součtem vlastních čísel a stopou matice. Stopa matice je součet prvků na diagonále, tedy

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 10 + 5 + 15 - 19 = 11.$$

Protože je stopa matice zároveň rovná součtu vlastních čísel, platí pro zbylé vlastní číslo

$$\lambda_4 = 11 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 11 - 3 + 4 - 5 = 7.$$

Cv. 7.5 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice A^2,
(b) matice αA,
(c) matice $A + \alpha I_n$,
(d) matice A^T.

Řešení:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Jak se bude chovat x_i při přenásobení A^2? Dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i(A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

Vlastní číslo λ_i se umocní na druhou a vlastní vektor x_i zůstane stejný.
Matice A^2 má tedy vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $\alpha A x_i$. Dostáváme

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i,$$

Matice αA má vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$.

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $(A + \alpha I_n)x_i$. Dostáváme

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

Matice $(A + \alpha I_n)$ má vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$.

(d) Postup z předchozích podúloh zde nelze přímo aplikovat, musíme využít něčeho jiného. Můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 7.6 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

<u>Řešení:</u>

Buď x vlastní vektor matice A. Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Cv. 7.7 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

<u>Řešení:</u>

Využijeme charakterizace, že matice je regulární právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla nenulová. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou ta vlastní čísla matice A, která jsou reálná (ta ryze komplexní můžeme ignorovat). Ze cvičení 7.5(c) víme, že se vlastní čísla matice $(A + \beta I_n)$ rovnají $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta$. Protože chceme regularitu pro všechny $\beta > \alpha$, musí dokonce platit nezápornost vlastních čísel, $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta \geq 0$. V opačném případě, kdy máme jedno vlastní číslo záporné snadno najdeme $\beta' > \beta$ takové, že jemu odpovídající vlastní číslo $(A + \beta' I_n)$ bude nulové, a matice bude singulární.

Hodnotu α tedy zvolíme tak, že $\lambda_1 + \alpha \geq \cdots \geq \lambda_n + \alpha = 0$, z čehož odvodíme, že $\alpha = -\lambda_n$.

Cv. 7.8 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro matici
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Řešení:
Označme vlastní čísla A jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_m$. Obdobně pro matici B, mějme vlastní čísla $\mu_1, \ldots, \mu_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $y_1, \ldots, y_n$. Pro jednoduchost zde předpokládáme, že existuje plný počet vlastních vektorů. Označme $Mz = \nu z$ jako vlastní číslo ν a vlastní vektor z matice M. Můžeme blokově rozepsat
$$Mz = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_1 \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$
Z toho vyplývá, že $Az_1 = \nu z_1$ a $Bz_2 = \nu z_2$. Vidíme, že podvektory z_1, z_2 mají stejné vlastnosti, jako vlastní vektory A a B s tím rozdílem, že nepožadujeme nenulovost obou z nich zároveň (pouze nenulovost celého z). V závislosti na nulovosti složek z_1, z_2 rozlišíme několik případů:

(a) Pokud $z_1 = o$, musí $z_2 \neq o$ (z je vlastní vektor). Dostáváme
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix}.$$
Vidíme, že každý vektor $(o, y_i)^T$ je vlastním vektorem M s odpovídajícím vlastním číslem μ_i.

(b) Pokud $z_2 = o$, musí $z_1 \neq o$. Vidíme, že situace je obdobná jako v předchozím případě a proto platí, že vektor $(x_i, o)^T$ je vlastní vektor M odpovídající vlastnímu číslo λ_i.

(c) Případ, kdy $z_1 = o$ a $z_2 = o$ nemůže nastat, protože požadujeme nenulovost vlastního vektoru z.

(d) Pokud $z_1 \neq o$, $z_2 \neq o$, poté z_1 a z_2 odpovídají vlastním vektorům A a B. Pro ty musí platit, že jim odpovídá stejné vlastní číslo ν. Tedy pokud existuje $\lambda_i = \mu_j$, potom $z = (x_i, y_j)^T$ je vlastním vektorem M a $\lambda_i = \mu_j$ je jeho odpovídající vlastní číslo. Všimněme si nicméně, že v takovém případě je vektor $z = (x_i, 0)^T + (0, y_j)^T$ lineární kombinací již nalezených vlastních vektorů.

Vlastní čísla matice M tedy jsou
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$$
a příslušné vlastní vektory
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ o \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} o \\ y_n \end{pmatrix}.$$
Povšimněme si, že vlastní vektory tvaru $(x_i, 0)^T$ a $(0, y_j)^T$ jsou nenulové a lineárně nezávislé (protože $x_1, \ldots, x_m$ byly lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ také).

Cv. 7.9 Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Řešení:

Pro určení vlastních čísel matice projekce můžeme využít její vlastnost, že opakovaná projekce má stejný efekt, jako projekce samotná, neboli $P^2 = P$. Nechť λ je vlastní číslo P a x odpovídající vlastní vektor. Dostáváme,

$$P^2x = P(Px) = P(\lambda x) = \lambda(Px) = \lambda^2 x$$

a zároveň

$$P^2x = Px = \lambda x.$$

Z toho plyne, že $\lambda^2 = \lambda$, neboli $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Vlastní čísla matice P jsou proto pouze 1 a 0.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu 1 splňují $Px = x$. Z vlastností projekce tento vztah splňují všechny vektory $x \in V$, kde $V = \mathcal{S}(P)$ je podprostor, do kterého matice P projektuje. Jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů zvolíme libovolnou bázi prostoru V. Označíme-li $m = \dim(V) = \operatorname{rank}(P)$, tak jsme našli m vlastních vektorů pro vlastní číslo 1.

Vlastnímu číslu 0 odpovídají vektory splňující $Px = o$. To jsou ale vektory $x \in \operatorname{Ker}(P)$, jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů tedy zvolíme libovolnou bázi $\operatorname{Ker}(P)$. Z vlastnosti kolmé projekce si můžeme také uvědomit, že $\operatorname{Ker}(P) = V^\perp$. Našli jsme tedy $n - m$ vlastních vektorů pro vlastní číslo 0.

Celkem tak máme $m + (n-m) = n$ vlastních vektorů, takže už žádné jiné vlastní vektory, a tím pádem ani vlastní čísla, neexistují. Vlastní číslo 1 je m-násobné a vlastní číslo 0 je $(n - m)$-násobné.

Cv. 7.10 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A,

(c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A.

Řešení:

(a) Věta říká, že pro charakteristický polynom matice $p_A(\lambda)$ platí, že $p_A(A) = 0$. Určíme

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Dosadíme A,

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro vyjádření A^4 musíme λ^4 vydělit polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem, čímž získáme tvar $\lambda^4 = r(\lambda)p_A(\lambda) + s(\lambda)$. Po dosazení $\lambda = A$ dostaneme $A^4 = s(A)$, protože $p_A(A) = 0$. Spočítáme

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= r(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + s(\lambda) \\ &= (\lambda^2 + 5\lambda + 27)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + 145\lambda + 54, \end{aligned}$$

kde zbytek $s(\lambda) = 145\lambda + 54$. Dosazením máme požadované vyjádření

$$A^4 = s(A) = 145A \ + 54I_2.$$

Vztah můžeme ověřit zkouškou – levá i pravá strana výrazu dá stejnou matici

$$A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}.$$

(c) Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty platí

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2.$$

Rovnici vynásobíme maticí A^{-1} a získáme

$$0 = A - 5I_n - 2A^{-1}.$$

Z této rovnice už snadno vyjádříme A^{-1} jako

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5 \cdot I_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$