5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje podle nějakého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u>

(A) Výpočet z definice. Výpočet determinantu matice řádu $n \times n$ z definice vyžaduje enumeraci všech permutací a příslušných $n!$ členů, proto je rozumné determinant počítat z definice jenom pro malé řády. V našem případě musíme určit $3! = 6$ členů. Postupovat můžeme podle Sarrusova pravidla, které nabízí mnemotechnickou pomůcku na vyjádření determinantu. Konkrétně,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Determinant matice je tedy $\det(A) = -9$.

Stejným způsobem spočítáme hodnotu determinantu druhé matice a dostaneme, že $\det(B) = 60$.

(B) Gaussova eliminace. Výpočet determinantu pomocí Gaussovy eliminace funguje tak, že matici převedeme na odstupňovaný tvar pomocí elementárních řádkových úprav. Řádkové úpravy mění determinant, proto musíme zaznamenávat příslušnou změnu. Konkrétně záměna dvou řádků změní znaménko determinantu a vynásobení řádku číslem c změní determinant c-krát. Přičtení násobku řádku k jinému řádku determinant nemění. Jakmile máme matici upravenou na REF tvar, tak stačí jen vynásobit prvky na diagonále, protože determinant trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Postup předvedeme na matici B:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det se násobí } -1) \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det se zmenší 2-krát)} \end{aligned}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det se nemění)}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det se nemění)}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det se násobí } -1\text{)}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \qquad \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 60. \qquad \text{(Vynásobíme prvky na diagonále)}$$

Hledaný determinant matice B je tedy $\det(B) = 60$.

(C) Laplaceův rozvoj. Na matici A aplikujeme Laplaceův rozvoj podle druhého řádku. Proč jsme zvolili druhý řádek? Jak uvidíme ve výpočtu dole, tak každý nulový prvek v řádku nám zjednodušuje výpočet. Proto je z hlediska časové náročnosti výpočtu nejlepší zvolit řádek (nebo sloupec) s co nejvíce nulami.

Konkrétně Laplaceův rozvoj pracuje následovně; výpočet determinantů podmatic velikosti 2×2 již provádíme z definice:

$$\begin{aligned} \det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Determinant matice je $\det(A) = -9$. Tím, že druhý řádek matice A začíná nulou, jsme v Laplaceově rozvoji ušetřili výpočet determinantu jedné podmatice řádu 2×2.

Cv. 5.2 Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Můžeme postupovat Gaussovou eliminací nebo Laplaceovým rozvojem. Pokud zvolíme druhý způsob, je výhodné provést rozvoj podle posledního sloupce a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot 5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}\cdot 4\cdot 1 + (-1)^{2+4}\cdot 5\cdot 2 = 6.
\end{aligned}
$$

Cv. 5.3 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je tudíž roven $n!$.

(b) Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostaneme matici

$$
B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.
$$

Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce (při výpočtu determinantu můžeme provádět i elementární sloupcové úpravy právě díky rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$). Dostaneme

$$B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + \sum_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}.$$

Matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru a její determinant je tudíž součin diagonálních prvků. Tím dostáváme $\det(B) = (a_1 + \ldots + a_n + x)x^{n-1}$.

Cv. 5.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rozhodněte, zda následující vztahy pro blokové matice platí či ne:

(a) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$,

(b) $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

Řešení:

(a) Rovnost platí. Nahlédnout to můžeme pomocí Gaussovy eliminace. Pokud je aplikujeme na celou matici $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, dostaneme stejný výsledek, jako kdybychom ji aplikovali na obě matice A, B odděleně, a pak výsledné matice blokově složili.

Determinant trojúhelníkové matice spočítáme součinem prvků na diagonále. Takže dostaneme stejný výsledek, pokud vynásobíme diagonálu celé velké matice, nebo jestli vynásobíme diagonálu dvou menších matic a tyto dvě čísla pak vynásobíme mezi sebou.

Poznámka. Zde je namístě si uvědomit, že obecně rovnost

$$\mathrm{RREF}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{RREF}(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{RREF}(B) \end{pmatrix}$$

neplatí. V tom případě, kdy tato rovnost neplatí, je ale matice A singulární a identita $\det\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$ zůstává v platnosti.

(b) Můžeme uvažovat stejně jako v předchozím případě. Na matici C totiž vůbec nezáleží a nijak neovlivní postup a výsledek elementárních úprav, aplikovaných na bloky, kde se nachází matice A a B.

Cv. 5.5 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Řešení:

Pokud jsou obě matice čtvercové, tak rovnost platí. Podle vlastností determinantu odvodíme $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

Nicméně, výraz má smysl i pro obdélníkové matice, a to pokud matice A má rozměr $m \times n$ a matice B má rozměr $n \times m$. Potom součin AB je čtvercová matice řádu $m \times m$ a BA je čtvercová matice řádu $m \times m$. V tomto obecném případě už rovnost platit nemusí. Jako protipříklad poslouží například matice $A = (1, 1, 1, 1)$, $B = A^T$. Potom $\det(AB) = 4 \neq 0 = \det(BA)$.

Cv. 5.6 Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Řešení:
Podle vlastností determinantu upravíme

$$\det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \det(A).$$

Cv. 5.7 Spočítejte determinanty matic nad příslušnými tělesy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 2 & 1 & i+i \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}.$$

Řešení:

Máme dvě možnosti jak spočítat determinant nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. První je spočítat determinant jedním ze standardních způsobů (z definice, Gaussovou eliminací, či Laplaceovým rozvojem), ale používat operace z tělesa $\mathbb{Z}_p$. Druhá možnost je vypočítat determinant jako pro reálnou matici a výsledek pak vyjádřit modulo p. Proč tento způsob funguje? Determinant je podle definice jen součet součinů prvků matice, takže je jedno, jestli modulo počítáme průběžně nebo až na konci. Každopádně, determinant je roven 16, pokud počítáme v $\mathbb{R}$, a 1, pokud počítáme v $\mathbb{Z}_5$.

Determinant komplexní matice spočítáme standardně, jenom používáme komplexní aritmetiku. Například podle definice Sarrusovým pravidlem dostaneme

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i+1 \end{pmatrix} \\ &= (i-1)\cdot 1 \cdot (i+1) + 2 \cdot i \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &\quad - (i-1) \cdot i \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (i+1) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= -2 - 2i + 0 + 1 + 0 + (i+1) \\ &= -i. \end{aligned}$$