4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální právě tehdy, když $Q^TQ = I_n$. Stačí tedy ověřit tuto vlastnost pro zadané matice. Pro první matici spočítáme

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

takže matice není ortogonální. Sloupce matice sice tvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, ale nikoliv ortonormální bázi. Poznamenejme, že matice $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ by již ortogonální byla.

Pro druhou matici spočítáme

$$B^TB = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili goniometrickou identitu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Matice B je tudíž ortogonální.

Konečně pro třetí matici máme $C^TC = I_3$, takže je také ortogonální.

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.
(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Řešení:

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^Tu}(uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^TH(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)\left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}uu^Tuu^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}u(u^Tu)u^T \end{aligned}$$

$$= I_n - \frac{4}{u^T u} uu^T + \frac{4(u^T u)}{(u^T u)^2} uu^T$$
$$= I_n - \frac{4}{u^T u} uu^T + \frac{4}{u^T u} uu^T = I_n.$$

V úpravách jsme použili vztah $u(u^T u)u^T = (u^T u)uu^T$, který plyne z toho, že $(u^T u)$ je skalár, a tudíž lze z celého výrazu vytknout na začátek.

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože by to znamenalo, že $\frac{2}{u^T u} uu^T = 0$. A tato rovnost nenastane (pro $u \neq 0$ rovnost neplatí a pro $u = 0$ bychom ve zlomku dělili nulou).

Cv. 4.3 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ortogonální?

Řešení:

Ano a lze to nahlédnout několika způsoby.

První způsob je přímo z definice tím, že ověříme rovnost $A^T A = I_{m+n}$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T P & 0 \\ 0 & Q^T Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}.$$

Druhý možný způsob využívá charakterizace, že matice A je ortogonální právě tehdy, když její sloupečky tvoří ortonormální systém. To znamená, že sloupce A musí být navzájem kolmé a mít jednotkovou velikost:

- Pokud zvolíme dva sloupce z prvního bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice P je ortogonální. Pokud zvolíme dva sloupce z druhého bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice Q je ortogonální. Zbývá případ, kdy zvolíme jeden sloupec z prvního bloku a druhý z druhého bloku. I pak budou vektory na sebe kolmé díky nulovým složkám pod maticí P a nad maticí Q.
- Konečně sloupce matice A mají jednotkovou velikost, protože ji mají sloupce P i Q a přidáním nulových složech se velikost nezmění.

Cv. 4.4 Najděte všechny

(a) diagonální ortogonální matice řádu n,

(b) diagonální unitární matice řádu n.

Kolik jich je?

Řešení:

(a) Diagonální matice (s libovolnými prvky na diagonále) má vždy ve sloupcích ortogonální systém. Takže aby matice byla ortogonální, musí mít sloupce jednotkovou velikost. Tudíž pro každý prvek na diagonále musí platit $|a_{ii}| = 1$, což znamená, že $a_{ii} = 1$ nebo $a_{ii} = -1$. Matice tedy má tvar

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm1 \end{pmatrix}.$$

Takovýchto matice je 2^n.

(b) Analogicky jako v předchozím případě pro hledané matice platí $|a_{ii}| = 1$. Jelikož jsou tentokrát prvky matice komplexní čísla, je prvek a_{ii} jakékoli číslo na komplexní jednotkové kružnici, například 1, -1, i, $-i$, nebo $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Těchto čísel je nekonečně mnoho, takže i matic daného typu je nekonečně mnoho.

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Řešení:

Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků E_{ij}.
2. Matice $E_i(\pm1)$ vynásobení řádku i číslem ±1.

Snadno ověříme, že obě tyto matice jsou ortogonální. A naopak, žádná jiná už ortogonální není.

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1}?

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Řešení:

(a) Součin PA zpermutuje řádky matice A podle permutace p.

Důkaz. Řádek $p(i)$ matice PA má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice PA je i-tý řádek původní matice A.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle p.

(c) P je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice PQ.

Důkaz (z významu). Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice PQ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace q a pak podle permutace p, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.

Důkaz (z definice). Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když i-tý řádek matice P i j-tý sloupec matice Q jsou stejné jednotkové vektory, např e_k. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^TP = I_n$. Tudíž permutaci p^{-1} odpovídá permutační matice P^T.

(f) Součin AP zpermutuje sloupce matice A podle permutace p^{-1}.

Důkaz. Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^TA^T)^T$, čili matice P^TA^T zpermutuje řádky matice A^T podle permutace p^{-1}.

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

<u>Řešení</u>:

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce na sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.