

## 1. Skalární součin, norma

### Standardní a nestandardní skalární součin

**Cv. 1.1** Při použití standardního skalárního součinu v  $\mathbb{R}^4$  spočítejte pro vektory  $x = (1, 1, 1, 1)^T$  a  $y = (1, 2, 4, 2)^T$ :

- (a) skalární součin  $\langle x, y \rangle$ ,
- (b) normy  $\|x\|$ ,  $\|y\|$ ,
- (c) vzdálenost  $x$  od  $y$ .

**Cv. 1.2** Při použití standardního skalárního součinu v  $\mathbb{C}^3$  spočítejte pro vektory  $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$  a  $y = (1 - i, 1, 1)^T$ :

- (a) skalární součin  $\langle x, y \rangle$ ,
- (b) normy  $\|x\|$ ,  $\|y\|$ ,
- (c) vzdálenost  $x$  od  $y$ .

**Cv. 1.3** Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor  $y = (1, 5, 2)^T$ ? Dokážete závěr zobecnit?

**Cv. 1.4** Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru  $\mathbb{R}^2$ :

- (a)  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ ,
- (b)  $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$ ,
- (c)  $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$ ,
- (d)  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ .

### Norma indukovaná skalárním součinem

**Cv. 1.5** Pythagorova věta.

- (a) Nad  $\mathbb{R}$  dokažte:  $x \perp y$  platí právě tehdy, když  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
- (b) Najděte protipříklad nad  $\mathbb{C}$ , kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj.  $x, y$  nejsou kolmé a přesto  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**Cv. 1.6** Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Ukažte, že  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$  definuje skalární součin na prostoru  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .
- (b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- (c) Dokažte  $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$ .

**Cv. 1.7** Dokažte, že pro každé  $a_1, \dots, a_n > 0$  platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

## Norma obecně

**Cv. 1.8** Ověřte, že  $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$  je normou na prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

**Cv. 1.9** Buď  $\|\cdot\|$  libovolná reálná norma na prostoru  $\mathbb{R}^n$  a buď  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulární matice. Dokažte, že  $\|x\|_A := \|Ax\|$  je také norma.

**Cv. 1.10** Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|\end{aligned}$$

na prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

**Cv. 1.11** Jednotková koule v prostoru  $\mathbb{R}^n$  při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy  $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ . Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v  $\mathbb{R}^2$ :

- maximová norma  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ ,
- součtová norma  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ ,
- norma  $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$ .