1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \\ = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2+2^2+4^2+2^2} = 5.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x-y\| = \|(0,-1,-3,-1)^T\| = \sqrt{0^2+(-11)^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y}_i = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 = \\ = 1\cdot(1+i) + 3i\cdot 1 + (1+5i)\cdot 1 = 2+9i.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \overline{x}\rangle} = \sqrt{x^T\overline{x}} = \sqrt{1+3i(-3i)+(1+5i)(1-5i)} = 6,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \overline{y}\rangle} = \sqrt{y^T\overline{y}} = \sqrt{(1-i)(1+i)+1+1} = 2.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x-y\| = \|(i, -1+3i, 5i)^T\| = 6.$$

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1,5,2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Řešení:
Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y, pokud $0 = \langle x, y\rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Báze je tvořena například vektory $(5,-1,0)^T$, $(2,0,-1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy je podprostor dimenze $n-1$.

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1,0)^T$, $y = (0,1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1,0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1,0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1+2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

  Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \ \text{ a zároveň } \ x_2 = 0.$$

  To nastane pouze pro $x = (0,0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + 2(x_1+y_1)z_2 + 2(x_2+y_2)z_1 + 5(x_2+y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2).\end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle =\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y\rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \le n \cdot \operatorname{trace}(A^TA)$.

Řešení:

(a) Pišme

$$\operatorname{trace}(A^TB) = \sum_{i=1}^{n}(A^TB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A^T)_{ij}B_{ji}. = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}b_{ji}.$$

Čili výraz $\operatorname{trace}(A^TB)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

(b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ dostane podobu

$$\operatorname{trace}(A^T B) \leq \sqrt{\operatorname{trace}(A^T A)}\sqrt{\operatorname{trace}(B^T B)}.$$

Ekvivalentně můžeme též psát

$$\operatorname{trace}(A^T B)^2 \leq \operatorname{trace}(A^T A)\operatorname{trace}(B^T B).$$

(c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A \coloneqq I_n$, $B \coloneqq A$ a tím pádem dostaneme

$$\operatorname{trace}(A)^2 \leq \operatorname{trace}(I_n) \cdot \operatorname{trace}(A^T A) = n \cdot \operatorname{trace}(A^T A).$$

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Řešení:
Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin je tvaru

$$|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y. Konkrétně zvolíme

$$x = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})^T, \quad y = (1/\sqrt{a_1}, \ldots, 1/\sqrt{a_n})^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n 1\right|^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Norma obecně

Cv. 1.8 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:
Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

$$x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 4x_2 = 0, \quad 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení, a to $x_1 = x_2 = 0$. Proto $\|x\| = 0$ nastane jen tehdy, když $x = (0, 0)^T$.

- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, neboť

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1 - 2\alpha x_2| + |3\alpha x_1 - 4\alpha x_2| + |5\alpha x_1 - 6\alpha x_2| \\ &= |\alpha| \cdot |x_1 - 2x_2| + |\alpha| \cdot |3x_1 - 4x_2| + |\alpha| \cdot |5x_1 - 6x_2| \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\le |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 1.9 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A \coloneqq \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:
Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x+y\|_A = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \le \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cv. 1.10 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Řešení:
Nerovnost $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \le \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \le \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n}\{|x_i|\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ plyne díky

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{i=1,\dots,n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n}\{x_j^2\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2 = \|x\|_1^2.$$

Zbývá nerovnost $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ aplikovaná na vektor x a vektor $y = (1, \dots, 1)^T$ dává

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

To dokazuje požadovanou nerovnost v nezáporném ortantu. V dalších ortantech dostaneme nerovnost analogicky z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti aplikované na vektor x a příslušný vektor $y \in \{\pm 1\}^n$.

Cv. 1.11 Jednotková koule v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

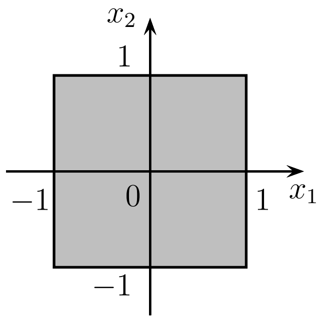
(a) maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) součtová norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

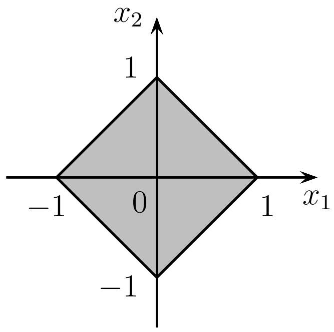
(c) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

Řešení:

(a) V maximové normě je jednotková koule popsaná nerovnicí $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$, což se dá ekvivalentně vyjádřit $|x_1| \leq 1$ a zároveň $|x_2| \leq 1$. To znamená, že $x_1 \in [-1, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$ a jednotková koule má tvar čtverce:



(b) V součtové normě je jednotková koule popsaná nerovnicí $|x_1|+|x_2| \leq 1$. Nyní budeme postupovat analýzou postupně pro jednotlivé kvadranty. V nezáporném kvadrantu má nerovnice tvar $x_1+x_2 \leq 1$, čili část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,0),(0,1)$. V kvadrantu vpravo dole (nezáporná první složka, nekladná druhá složka) má nerovnice tvar $x_1 - x_2 \leq 1$ a část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,0),(0,-1)$. Analogicky postupujeme dále a nakonec dostaneme požadovaný obrázek:



(c) V této normě je jednotková koule popsaná nerovnicí

$$\max\{|x_1|,|x_2|,|x_1-x_2|\} \leq 1,$$

což se dá ekvivalentně vyjádřit jako tři podmínky, které musí platit zároveň:

$$|x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1 \quad \text{a} \quad |x_1 - x_2| \leq 1.$$

Víme již, že první dvě podmínky popisují čtverec. Třetí podmínka z tohoto čtverce kus odřízne. Abychom to nahlédli, vyjádříme podmínku jako $x_1 - x_2 \leq 1$ a zároveň $-(x_1-x_2) \leq 1$. První nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(1,0),(1,-1),(0,-1)$ a druhá nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(-1,0),(-1,1),(0,1)$. Dohromady tak dostaneme jednotkovou kouli ve tvaru: