Domácí úlohy z Lineární algebry 2

6. března 2024

Martin Černý, Matyáš Lorenc

Na zápočet bude třeba získat alespoň polovinu (120 z 240) bodů z následujících úloh. Řešení úloh odevzdávejte e-mailem v jednom souboru ve formátu PDF, nebo na začátku cvičení v libovolné čitelné podobě. Několik dalších poznámek:

- Na úlohách je možné spolupracovat a používat všechny možné dostupné zdroje. Řešení úloh musí nicméně sepsat a odevzdat každý sám za sebe.
- Řešením úlohy není pouze výsledek, ale i řádně vysvětlený postup, jak jste k řešení došli, případně důkaz toho, co ve výsledku tvrdíte.
- Úlohy jsou rozděleny tematicky do sérií, které mají určené deadliny. Ty jsou ve dnech cvičení a časově odpovídají začátku cvičení. Po uplynutí deadlinu je možné za vyřešené úlohy získat polovinu bodů.
- V případě, že byste si nevěděli s domácími úkoly rady, nebo chtěli něco prodiskutovat, není problém se domluvit na konzultaci.
- Pokud v zadání úlohy není výslovně požadován důkaz něčeho, co bylo na přednášce, či cvičení, je možné se při řešení úlohy na tento výsledek odkázat a není třeba ho již dokazovat.
- Naopak chcete-li použít ve svém řešení výsledek, který se neobjevil na přednášce, je třeba ho řádně zadefinovat a případně dokázat jeho platnost.

(1) Determinant (34 bodů)

Deadline: 5. března 2024

1. **(10 bodů)** Spočítejte determinanty:
   (a) (1 bod) $det(-4)$,
   (b) (1 bod) $det(-I_n)$,
   (c) (2 body) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,
   (d) (2 body) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$,
   (e) (4 body) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

2. **(8 bodů)** Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že $det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A)det(B)$.

3. **(16 bodů)** Říkáme, že celočíselná matice $M \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární* (dále již jen TU), pokud je každý její minor (tedy determinant čtvercové podmatice) roven -1, 0, či 1.

   Buď $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ regulární. Dokažte, že je-li A TU, pak nutně i A^{-1} je TU (tedy že A^{-1} je celočíselná a splňuje definici výše).

   (Zkuste si vedle celočíselnosti dokázat pro začátek alespoň to, že hodnoty determinantů podmatic o rozměrech 1×1 a $n \times n$ jsou správné. Obecné podmatice jsou potom těžší.)

   (Pozn.: Při dokazování, že minor je roven -1,0,1, nemusíte příliš řešit znaménko, ať neskončíte zavaleni zbytečnými detaily, klidně v průběhu pište +- něco, stejně musíte dokázat primárně to, že to něco je ve výsledku 0, nebo 1. Jestli plus, nebo mínus už je nám celkem jedno, dovolujeme vám tedy v důkazu toto zjednodušení.)

(2) Vlastní čísla, vlastní vektory (34 bodů)

Deadline: 19. března 2024

1. **(14 bodů)** Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory následujícím maticím:
   (a) (4 body) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   (b) (4 body) $B = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$,
   (c) (6 bodů) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. **(4 body)** Nechť $A^k = 0$ pro nějaké $k \geq 1$. Co lze říci o vlastních číslech matice A?
3. **(8 bodů)** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárních zobrazení:
   (a) (4 body) $A \to A^T$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
   (b) (4 bodů) $A \to \frac{1}{2}(A + A^T)$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$.
4. **(4 bodů)** Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ reálná?
5. **(4 body)** Najděte matici, která má všechny složky nenulové a zároveň všechna vlastní čísla nulová.

(3) Podobnost a diagonalizace (34 bodů)

Deadline: 2. dubna 2024

1. **(6 bodů)** Rozhodněte, zda si jsou podobné matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **(8 bodů)** Buď $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Ukažte, že $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ je podobná $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

3. **(4 body)** Najděte všechny matice podobné matici I_n.

4. **(8 bodů)** Diagonalizujte, nebo ukažte, že není možné diagonaliovat matice
   (a) (3 body) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   (b) (5 bodů) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. **(4 body)** Nechť $A = S\Lambda S^{-1}$ je diagonalizační rozklad matice A. Určete vlastní vektory A^T.

6. **(4 body)** Najděte dva příklady nediagonalizovatelných matic řádu 2: singulární a regulární matici.

(4) Skalární součin (34 bodů)

Deadline: 16. dubna 2024

1. **(10 bodů)** Mějme zobrazení $\langle x, y\rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ a vektory $x' = (1,2)^T$ a $y' = (2,5)^T$.
   (a) (6 bodů) Ukažte, že $\langle x, y\rangle$ je skalárním součinem,
   (b) (1 body) spočtěte $\langle x', y'\rangle$,
   (c) (1 body) spočtěte $\|x'\|$,
   (d) (2 body) spočtěte vzdálenost x' od y'.
2. **(3 body)** Dokažte, nebo vyvraťte, že v prostoru matic $\mathbb{R}^{m\times n}$ je zobrazení $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ skalární součin.
3. **(3 body)** Je skalární součin lineárním zobrazením, jak ho máme zadefinované z Lineární algebry 1?
4. **(6 bodů)** Určete úhel mezi:
   (a) (3 body) vektory $x = (0,0,1)^T$ a $y = (1, 0 - 1)^T$,
   (b) (3 body) hlavní diagonálou krychle a její podstavou.
5. **(4 bodů)** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Ukažte, že pro $i \neq j$ je $i-$tý řádek matice A kolmý na $j-$tý sloupec matice A^{-1}.
6. **(8 bodů)** Zaveďte v prostoru $\mathbb{R}^2$ skalární součin tak, aby x' bylo kolmé na y', kde $x' = (1,2)^T$ a $y' = (2,3)^T$.

(5) Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt a ortogonalita (34 bodů)

Deadline: 30. dubna 2024

1. **(3 body)** Dokažte, že pro každé $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ platí: $5a_1 + a_2 + 3a_3 + a_4 \leq 6\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$.
2. **(3 body)** Dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.
3. **(10 bodů)** Stopa čtvercové matice je definována jako $trace(A) = \sum_i a_{ii}$. Ukažte, že platí:
   (a) (3 body) $trace(A)^2 \leq n \cdot trace(A^T A)$,
   (b) (3 body) $trace(A^2) \leq trace(A^T A)$,
   (c) (4 body) $trace(A^T B) \leq \frac{1}{2}(trace(A^T A) + trace(B^T B))$.
4. **(12 bodů)** Buď $v_1 = (1, 1, 0)^T$ a $v_2 = (1, 1, 1)^T$:
   (a) (4 body) ortogonalizujte vektory v_1, v_2,
   (b) (4 body) proveďte ortogonalizaci v opačném pořadí vektorů,
   (c) (4 body) najděte projekci $x = (0, 1, 1)^T$ do podprostoru $U = span\{v_1, v_2\}$. Jaká ja vzdálenost x od U?
5. **(6 bodů)** Zortogonalizujte bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ popsaného soustavou $x - y + u + v = 0$, $x + u = 0$.

(6) Ortogonální matice, doplněk a projekce (35 bodů)

Deadline: 14. května 2024

1. **(3 body)** Nechť P, Q jsou ortogonální matice. Je i $P + Q$ ortogonální?
2. **(3 body)** Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?
3. **(6 bodů)** Ortogonální matice Q obsahuje pouze prvky $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{4}$. Jaký je rozměr matice Q?
4. **(6 bodů)** Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ ortogonální?
5. **(8 bodů)** Najděte matici projekce do
   (a) (3 body) $U = span\left\{(2,1,1)^T\right\}$
   (b) (5 bodů) $V = span\left\{(0,1,1)^T, (1,0,-1)^T, (0,0,1)^T\right\}$
6. **(3 body)** Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Najděte řádkový prostor a kernel matice A.
7. **(6 bodů)** Najděte ortogonální doplněk k prostorům:
   (a) (3 body) $U = \left\{(1,0,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\right\}$,
   (b) (3 body) $V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}$.

(7) Positivní definitnost a bilineární formy (35 bodů)

Deadline: Konec akademického roku

1. **(10 bodů)** Ukažte 3 způsoby, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je positivně semidefinitní.

2. **(6 bodů)** Určete, pro které a je matice positivně definitní

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

3. **(7 bodů)** Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}.$$

4. **(4 body)** Ukažte, že pro každou bilineární formu b platí $b(u,0) = b(0,u) = 0$.

5. **(8 bodů)** Jedná se o bilineární formy?

   (a) (4 body) $b(x,y) = x_1^2 + y_2^2 + 2x_2y_1$,

   (b) (4 body) $c(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_2 + y_1y_2$.