

14. Afinní podprostory

Afinní podprostory, afinní nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, \quad x_1 = (2, 3, 1)^T, \quad x_2 = (1, 3, 2)^T, \quad x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, \quad x_1 = (2, 2, 1)^T, \quad x_2 = (2, 1, 3)^T \quad \text{a} \quad x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory x_0, x_1, \dots, x_n jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

- (a) $M = \text{span}\{(1, 2)^T\} + (1, -1)^T,$
 $N = \text{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T,$
- (b) $M = \text{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T,$
 $N = \text{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T.$

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10); x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překlopení podle přímky $q = \{(2, y); y \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Najděte maticový předpis zobrazení f ,
 (b) najděte maticový předpis zobrazení g ,
 (c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 14.7 Dokažte:

- (a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
 (b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.
 (c) Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) := \{u \in U ; f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U .

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.