14. Afinní podprostory

Afinní podprostory, afinní nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:
Označme jako $X = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}$ množinu řešení soustavy. Uvažujme n řešení $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ (tedy $Ax_i = b$ pro $i = 1, \dots, n$). Máme ukázat, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X, tedy

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy roznásobíme závorku a vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) &= \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \ldots + \alpha_n A x_n = \\ &= \alpha_1 b + \alpha_2 b + \ldots + \alpha_n b = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) b = \\ &= b. \end{aligned}$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,2,3)^T,\ x_1 = (2,3,1)^T,\ x_2 = (1,3,2)^T,\ x_3 = (2,1,3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:
Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1,1,-2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0,1,-1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1,-1,0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,0,2)^T,\ x_1 = (2,2,1)^T,\ x_2 = (2,1,3)^T \text{ a } x_3 = (3,3,2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:
Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostoru $\operatorname{span}\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme

$x_1 - x_0 = (1,2,-1)^T$, $x_2 - x_0 = (1,1,1)^T$, $x_3 - x_0 = (2,3,0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnosti následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots,$ $y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:
Vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T, 1)^T, \ldots, (x_n^T, 1)^T$$

jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T - x_0^T, 0)^T, \ldots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé (jsou to vlastně elementární úpravy, když vektory dáme do matice). To je ekvivalentní s tím, že vektory

$$(x_1^T - x_0^T, 0)^T, \ldots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé. A to už je zřejmě ekvivalentní s definicí afinní nezávislostí vektorů $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \text{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T$,
$N = \text{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T$,

(b) $M = \text{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T$,
$N = \text{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$.

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M, tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1). Jejich rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1,-1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N, tedy jako $(1,-1)^T = \alpha(2,4)^T + (2,3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1, \\ 4\alpha + 3 &= -1, \end{aligned}$$

která nemá řešení. Proto $(1,-1)^T \notin M$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný. Ve skutečnosti přímky M, N jsou rovnoběžné.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T \in M$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do N, tedy se dá vyjádřit jako $c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T = c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T,$$

která se dá zapsat jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned}$$

Pozor, nejedná se o klasicou soustavu rovnic, spíš jen o rovnost s parametry, kterým dodáme určitou interpretaci. Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b, znamená to, že pro libovolný vektor z M daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N. Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d, dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 2 & -1 & \frac{1}{3}(3a+3) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) \end{array}\right).$$

Platí, že $\frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{1}{3}(2a+b+1)$ a $d = \frac{1}{3}(a+2b-1)$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10);\ x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překloplení podle přímky $q = \{(2, y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

<u>Řešení</u>:

(a) Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x ve směru vektoru $(0, -10)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 10)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -10)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,
- $f_3(x) = x + (0, 10)^T$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0,-10)^T)) = f_3(O_1(x + (0,-10)^T)) = \\ &= O_1(x + (0,-10)^T) + (0,10)^T = O_1 x + (0,10)^T + (0,10)^T = \\ &= O_1 x + (0,20)^T. \end{aligned}$$

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3, kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$ (posunutí o $(-2, 0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$ (překloplení podél osy y),

- $g_3(x) = x + (2,0)^T$ (posunutí nazpět o $(2,0)^T$).

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4,0)^T$.

(c) Složení $f \circ g$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4,0)^T) &= O_1(O_2x + (4,0)^T) + (0,20)^T = \\ &= O_1O_2x + O_1(4,0)^T + (0,20)^T = O_1O_2x + (4,0)^T + (0,20)^T = \\ &= O_1O_2x + (4,20)^T, \end{aligned}$$

po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.7 Dokažte:

(a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.

(b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

(c) Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) \coloneqq \{u \in U \ ; \ f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U.

<u>Řešení:</u>

(a) Mějme vektorový prostor V a afinní podprostor

$$M = U + a = \{u + a;\ u \in U\},$$

kde $U \Subset V$ a $a \in V$. Dále mějme lineární zobrazení $g\colon V \to W$, vektor $b \in W$ a afinní zobrazení $f\colon V \to W$ definované pomocí

$$f(x) = g(x) + b.$$

Dostáváme,

$$f(M) = f(U + a) = g(U + a) + b = g(U) + g(a) + b.$$

Z toho, že $g(a) + b \in W$ a $g(U) \Subset W$ dostáváme platnost tvrzení.

(b) Mějme dvě afinní zobrazení $f_1\colon U \to V$, $f_2\colon V \to W$ určená pomocí lineárních zobrazení g_1, g_2 a vektorů $b_1 \in V$, $b_2 \in W$ takto:

$$f_1(x) = g_1(x) + b_1, \quad f_2(x) = g_2(x) + b_2.$$

Potom složení můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(x) &= f_2(g_1(x) + b_1) = g_2(g_1(x) + b_1) + b_2 = \\ &= g_2(g_1(x)) + g_2(b_1) + b_2 = (g_2 \circ g_1)(x) + g_2(b_1) + b_2. \end{aligned}$$

Z toho, že $g_2 \circ g_1\colon U \to W$ je lineární zobrazení a $g_2(b_1) + b_2 \in W$ dostáváme platnost tvrzení.

(c) K důkazu využijeme charakterizaci afinních podprostorům, které říká, že M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a skalár α platí, že $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.

Označme $M \coloneqq f^{-1}(v)$. Pokud $x, y \in M$, potom $f(x) = v$ a $f(y) = v$. Z toho dostáváme

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) = \alpha v \ + (1-\alpha)v \ = v.$$

Tudíž $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$ a dostáváme platnost tvrzení.

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Řešení:

Úplným vzorem jsou všechny matice splňující vztah $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = I_2$, po složkách

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ekvivalentně

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ a $a_{21} = -a_{12}$, úplným vzorem je množina matic

$$f^{-1}(I_2) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right);\, x \in \mathbb{R}\}.$$