

## 13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

### Obraz a jádro

**Cv. 13.1** Pro lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  dané předpisem  $A \mapsto (A - A^T)$  rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

- (a)  $I_2$ ,
- (b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,
- (d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Cv. 13.2** Uvažujme lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Označme lineární zobrazení  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^n = f \circ f^{n-1}$ . Ukažte, že  $\text{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \text{Ker}(f^n)$ .

**Cv. 13.3** Buď  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineární zobrazení zadané

$$f(1, 0, 1) = (0, 1)^T, \quad f(0, 1, 1) = (-1, 0)^T, \quad f(1, 1, 0) = (1, 0)^T.$$

- (a) Určete  $\dim f(\mathbb{R}^3)$  a  $\dim \text{Ker}(f)$ .
- (b) Najděte bázi  $f(\mathbb{R}^3)$  a  $\text{Ker}(f)$ .

**Cv. 13.4** Co je obrazem prostoru  $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$  při zobrazení s maticí  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  vzhledem k bázím  $\{\cos x - \sin x, \sin x\}$  a  $\{\cos x + \sin x, \cos x\}$ ?

**Cv. 13.5** Buď  $f: U \rightarrow V$  lineární zobrazení a  $W$  podprostor  $f(U)$ . Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U; f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru  $U$ .

### Zobrazení prosté a na

**Cv. 13.6** Mějme lineární zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadané obrazem báze  $B$ :

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory  $u, v \in \mathbb{R}^3$  takové, že  $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$ ) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy  $u \in \mathbb{R}^3$  takové že  $\forall v \in \mathbb{R}^3: f(v) \neq u$ ). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

**Cv. 13.7** Jak poznáme ze zadané matice  $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$  lineárního zobrazení  $f: U \rightarrow V$ , že zobrazení  $f$  je prosté, resp. „na“?

**Cv. 13.8** Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

- (a)  $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané předpisem  $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c, a + b, a)^T$ ,
- (b)  $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dané předpisem  $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + c, a + b)^T$ ,
- (c)  $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané předpisem  $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, c, a + b)^T$ ,
- (d)  $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané předpisem  $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b)^T$ .

## Isomorfismus

**Cv. 13.9** Rozhodněte, zda zobrazení  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem  $\mathbb{R}^3$  na sebe sama (takzvaným automorfismem).

**Cv. 13.10** Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

- (a)  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  a  $\mathbb{R}^4$ ,
- (b)  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathcal{P}^3$  (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),
- (c)  $\mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ,
- (d)  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}^n$  nad  $\mathbb{C}$ ,
- (e)  $\mathbb{R}^2$  a  $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$ ,
- (f)  $\mathbb{R}^4$  a prostor lineárních zobrazení  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Cv. 13.11** Buď  $f: U \rightarrow V$  isomorfismus a  $x_1, \dots, x_n \in U$ . Dokažte, že jsou-li  $x_1, \dots, x_n$  lineárně nezávislé, pak i  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  jsou lineárně nezávislé.