

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru \mathbb{R}^3 uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (2, 0, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T\}.$$

- Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.
- Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1 .
- Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B_1 .
- Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1 .

Řešení:

Obecně má matice přechodu od báze $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ do báze $B_2 = \{c_1, \dots, c_n\}$ předpis

$${}_{B_2}[id]_{B_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ [b_1]_{B_2} & [b_2]_{B_2} & \dots & [b_n]_{B_2} \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

- Chceme matici přechodu ${}_{\text{kan}}[id]_{B_1}$. Podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ [b_1]_{\text{kan}} & [b_2]_{\text{kan}} & \dots & [b_n]_{\text{kan}} \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

Stačí tedy pouze vzít bázecké vektory B_1 a dát je do sloupečků matice,

$${}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Chceme matici přechodu ${}_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. První možností je postupovat podle předpisu výše, tedy zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ [e_1]_{B_1} & [e_2]_{B_1} & \dots & [e_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

To odpovídá hledání koeficientů vektorů e_i při bázi B_1 , tedy problému, který umíme převést na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Jednotlivými řešeními této soustavy jsou vektory $\frac{1}{3}(-1, 1, 2)^T$, $\frac{1}{3}(2, 1, -1)^T$ a $\frac{1}{3}(2, -2, -1)^T$. Dostáváme tedy matici

$${}_{B_1}[id]_{\text{kan}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob by bylo využít vztahu $({}_{B_1}[id]_{B_2})^{-1} = {}_{B_2}[id]_{B_1}$. Všimněme si ovšem, že výpočet inverze vede v našem případě na řešení stejné soustavy rovnic, jako při prvním způsobu výpočtu.

- (c) Opět můžeme problém řešit dvěma způsoby. První by byl přímo z definice hledat koeficienty zadaného vektoru vůči bázi, který vede na řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

V našem případě bude jednodušší využít vztahu $[x]_{B_1} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot [x]_{\text{kan}} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot x$, tedy

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Chceme matici ${}_{B_1}[id]_{B_2}$. Ukážeme dva postupy.

První způsob je z definice matice zobrazení. Z předpisu výše musíme zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ [c_1]_{B_1} & [c_2]_{B_1} & \cdots & [c_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

Podobně jako v podúloze (b) vede tento problém na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Jednotlivými řešeními jsou vektory $\frac{1}{3}(5, 1, 2)^T$, $\frac{1}{3}(1, -1, 1)^T$ a $\frac{1}{3}(7, -1, -2)^T$. Dostáváme tedy matici

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob využívá toho, že už známe konkrétní hodnoty matice ${}_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Můžeme pak snadno spočítat

$$\begin{aligned} {}_{B_1}[id]_{B_2} &= {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_2} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3 .

Řešení:

Matici přechodu bychom mohli nalézt stejným způsobem, jako v předchozí úloze. Alternativně nám stačí si uvědomit, že jediné, co se na bázi mění je pořadí vektorů, tedy v důsledku toho i pořadí souřadnic vektorů. Zatímco tedy původně byly souřadnice vektorů b_1, b_2, b_3, b_4 vůči první bázi vektory

$$(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T,$$

vůči druhé bázi dostáváme vektory

$$(0, 0, 1, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 0, 0)^T.$$

Matice přechodu bude mít proto předpis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru \mathcal{P}^2 , je-li

$$B_1 = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}, \quad B_2 = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}.$$

Řešení:

Postup je úplně stejný jako v předchozích úlohách. Hledáme souřadnice bázeckých vektorů B_1 vůči bázi B_2 . Pro vektor $x^2 + 1$ řešíme

$$x^2 + 1 = \alpha_1(x^2 + 2x + 1) + \alpha_2(2x^2 + 1) + \alpha_3(x^2 - x).$$

Dva polynomy se rovnají, pokud se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin x , rovnice je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ta má řešení $(-1, 2, -2)^T$. Obdobně lze spočítat souřadnice $[x^2 - 3x + 1]_{B_2} = (-4, 5, -5)^T$ a $[x^2 + x + 3]_{B_2} = (-4, 7, -9)^T$. Dostáváme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Všechna tři řešení můžeme opět spočítat naráz pomocí jedné soustavy se třemi pravými stranami. Pokud tedy rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

převědeme na RREF tvar $(I_3 | A)$, potom v pravé části vyčteme hledanou matici A .

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1, -1, 1)^T, \quad f(e_2) = (0, 1, 1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, -1)^T, (1, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(1, -1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}.$$

Spočítejte:

- matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$.
- matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$.
- matici zobrazení od kanonické bázi k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$.
- matici zobrazení od B_1 k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Řešení:

Obecně má maticová reprezentace zobrazení $f: U \rightarrow V$ od báze $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ do báze $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ předpis

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [f(u_1)]_{B_2} & [f(u_2)]_{B_2} & \dots & [f(u_n)]_{B_2} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

- Chceme matici ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} | & | \\ [f(e_1)]_{\text{kan}} & [f(e_2)]_{\text{kan}} \\ | & | \end{array} \right).$$

Sloupce $[f(e_i)]_{\text{kan}} = f(e_i)$ dostáváme přímo ze zadání. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Chceme matici ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} & \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} \end{array} \right).$$

Z vlastností lineárního zobrazení dostáváme

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= f(e_1) - f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Výsledná matice má tedy tvar

$${}_{\text{kan}}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativně můžeme hledanou matici dostat rozdělením na jednodušší části s využitím matice složeného zobrazení:

$${}_{\text{kan}}[f]_{B_1} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Chceme matici ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline [f(e_1)]_{B_2} & [f(e_2)]_{B_2} \\ \hline & \end{array} \right).$$

Souřadnice $[(1, -1, 1)^T]_{B_2}$, $[(0, 1, 1)^T]_{B_2}$ můžeme získat jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

V tomto případě si také stačí uvědomit, že $f(e_1)$ odpovídá prvnímu bázičkému vektoru B_2 a $f(e_2)$ odpovídá třetímu bázičkému vektoru B_2 , jejich souřadnice budou proto $(1, 0, 0)^T$, resp. $(0, 0, 1)^T$. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{B_2}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět je užitečné ukázat i alternativní způsob pomocí skládání jednodušších zobrazení:

$${}_{B_2}[f]_{\text{kan}} = {}_{B_2}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde ale musíme invertovat matici ${}_{B_2}[id]_{\text{kan}} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B_2})^{-1}$, takže pokud inverzi nemáme předem spočítanou, tak tento postup efektivnější nebude.

(d) Chceme matici ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \right).$$

Z podúlohy (b) již známe obrazy $f(1, -1)^T = (1, -2, 0)^T$, $f(1, 1)^T = (1, 0, 2)^T$. Ty tedy stačí vyjádřit v souřadnicích báze B_2 . Souřadnice nalezeneme jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Jednotlivá řešení jsou vektory $(1, 0, -1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, výsledná matice má proto tvar

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím předchozích bodů hledanou matici můžeme také spočítat takto:

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_2}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete ${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Řešení:

K řešení můžeme využít vztahu ${}_{B_3}[g \circ f]_{B_1} = {}_{B_3}[g]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1}$, v našem případě ve tvaru

$${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[g]_B \cdot {}_B[f]_{\text{kan}}.$$

Matici ${}_{\text{kan}}[g]_B$ můžeme nejsnadněji zkonstruovat pomocí matic přechodu jako

$${}_{\text{kan}}[g]_B = {}_{\text{kan}}[id]_B \cdot {}_B[g]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_B.$$

Dostáváme tedy

$${}_{\text{kan}}[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice proto je

$${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\text{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Řešení:

Vztah mezi A a $\text{RREF}(A)$ lze vyjádřit jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = E_k \dots E_1 \cdot A,$$

kde matice E_i reprezentují jednotlivé elementární řádkové úpravy. Pro nás je klíčové, že tyto matice jsou regulární a každou regulární matici můžeme chápat jako matici přechodu

$$E_i = {}_{B'_i}[id]_{B_i}$$

mezi určitými bázemi. Podobně můžeme vyjádřit souhrnně matici E

$$E = {}_{B'_V}[id]_{B_V}$$

pro vhodnou bázi B'_V prostoru V . Proč? Protože

$${}_{B'_V}[id]_{B_V} = {}_{B'_V}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B'_V})^{-1} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V},$$

dostáváme

$${}_{\text{kan}}[id]_{B'_V} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1},$$

a tudíž bázi B'_V (přesně řečeno její souřadnice vzhledem ke kanonické bázi) vyčteme ze sloupců matice ${}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1}$.

Odstupňovaný tvar matice A tedy můžeme chápat jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = {}_{B'_V}[id]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B'_V}[f]_{B_U},$$

tedy maticovou reprezentaci stejného zobrazení, která se liší pouze ve výstupní bázi.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_B[f]_B$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B' ?

Řešení:

Máme dvě možnosti, jak dojít k řešení:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_B[f]_B$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'}$.

Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B' se zobrazí maticí přechodu ${}_B[id]_{B'}$ vůči bázi B , následně se transformuje maticí ${}_B[f]_B$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B'}[id]_B$ vůči bázi B' .

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M ?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení a je jich tedy nekonečně mnoho.