7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s+t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s-t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 7.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,

(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,

(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),

(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1,2,3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1,1,1)^T, (2,1,3)^T, (3,1,5)^T$

(b) $(2,1,3)^T, (3,1,2)^T, (1,1,1)^T$.