4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:
Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:
Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převedeme tím na předchozí případ.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;

(b) $x = e_i - e_j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Řešení:
Ve všech třech případech využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

(a) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

(b) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(c) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & d_n & 0 & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & \frac{1}{d_n} \end{array}\right)$$

Jediné, co G-J eliminace provádí za operace je přeškálování řádků, protože první podmatice je již v diagonálním tvaru.

Inverzní matice existuje ale jen tehdy, když všechny hodnoty $d_1, \ldots, d_n$ jsou nenulové. V opačném případě je matice singulární, a tudíž inverzi nemá.

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Řešení:
Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je pomocí G-J eliminace převodem $(A \mid I_n)$ na $(I_n \mid A^{-1})$. Matici

$E_i(\alpha)$ invertujeme takto:

$$
(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).
$$

Matici $E_{ij}(\alpha)$ invertujeme takto:

$$
(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\
 & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1
\end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).
$$

Matici E_{ij} invertujeme takto:

$$
(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc}
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).
$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu matic elementárních úprav. Matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je reprezentováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} je inverzní sama k sobě.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$

(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Řešení:

(a) Stačí iterativně aplikovat pravidlo $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Tedy:

$$(ABC)^{-1} = (A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

(b) S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned}
&(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} \\
&\quad = IA - B^T A^{-1} A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\
&\quad = IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\
&\quad = A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení maticí } I\text{]} \\
&\quad = A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\
&\quad = A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\
&\quad = A.
\end{aligned}$$

Cv. 4.7 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Řešení:
Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože

$$(ABA^{-1})^1 = AB^1 A^{-1}.$$

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}
(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1}) \\
&= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\
&= AB^k A^{-1}.
\end{aligned}$$

Cv. 4.8 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

<u>Řešení:</u>
Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 4.9 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Rozhodněte, kdy je regulární.

(b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.

(c) Určete inverzi obecně.

Řešení:

(a) Regularitu můžeme otestovat Gaussovou eliminací převodem do odstupňovaného tvaru. Uvědomme si, že při eliminaci řádků odpovídajících matici A nijak neupravujeme řádky odpovídající C a naopak. Regularita matice je proto podmíněna regularitou bloku C, v opačném případě bychom dostali nulový řádek. Pokud je blok C regulární, jsme schopni matici převést do tvaru
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$
Tedy pokud by nebyl blok A regulární, mohli bychom z tohoto tvaru získat Gaussovou eliminací nulový řádek. Regularita bloků A, C je tedy nutnou podmínkou regularity matice.

Zároveň regularita A, C zajišťuje, že můžeme převést matici do tvaru
$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix},$$
což je redukovaný odstupňovaný tvar původní matice s plnou hodností. Regularita bloků A, C je tedy jak nutnou, tak i postačující podmínkou regularity.

(b) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$
Podobně jako v předchozím podúloze se při G-J eliminaci budou upravovat řádky odpovídající blokům A a C nezávisle na sobě. Při převodu $\left(A \quad 0_n \mid I_n \quad 0_n\right)$ se nulové bloky 0_n po celou dobu výpočtu nebudou měnit a nebude na nich záviset ani podoba eliminace. Na konci eliminace proto dostaneme $\left(I_n \quad 0_n \mid A^{-1} \quad 0_n\right)$. Obdobný průběh bude mít i výpočet na podmatici $\left(0_n \quad C \mid 0_n \quad I_n\right)$. Inverzní matice má proto tvar
$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$
Opět využijeme nezávislosti eliminace pro řádky odpovídající blokům A a C a převedeme matici nejprve do tvaru
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

Klíčové je, že po zbytek eliminace se spodní dva bloky již měnit nebudou. Víme tedy, že inverzní matice má tvar

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix},$$

kde matice X, Y zatím neznáme. Určit je můžeme ze vztahu matice a její inverze,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Z tohoto vztahu můžeme odvodit dvojici soustav,

$$AX = I_n \quad \text{a} \quad AY + BC^{-1} = 0_n.$$

Z první soustavy dostáváme $X = A^{-1}$, z druhé $Y = -A^{-1}BC^{-1}$. Inverzní matice má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Alternativní způsob získání matic X, Y je, že upravujeme přímo bloky v matici

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

První blokový řádek vynásobíme maticí A^{-1} (z bodu (a) víme, že existuje):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

a nakonec od prvního blokového řádku odečteme $A^{-1}B$-násobek druhého:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & 0_n & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

Cv. 4.10 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

<u>Řešení:</u>

Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$-násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha\frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n-1$.