

### 3. Operace s maticemi

**Cv. 3.1** Spočítejte následující výrazy:

- (a)  $2A$ ,
- (b)  $A + B$ ,
- (c)  $C^T$ ,
- (d)  $Cv$ ,
- (e)  $BC$ ,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**

- (a) Pokud matice  $A$  je řádu  $m \times n$  výsledná matice bude také řádu  $m \times n$ . Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice  $A$  násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Abychom mohli sečíst matice  $A$ ,  $B$  musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu  $2 \times 2$ ). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice  $A$  (resp.  $B$ ), tedy  $2 \times 2$ . Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice  $A$  a  $B$  na dané pozici. Dostáváme:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-1) \\ 2 + 0 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Je-li původní matice rozměrů  $m \times n$ , transponovaná matice bude mít rozměry  $n \times m$ . Její prvek na pozici  $(i, j)$  je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici  $(j, i)$ . Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Je-li matice  $C$  řádu  $m \times n$ , musí  $v$  být  $n$ -složkový vektor a výsledkem bude  $m$  složkový vektor. V tomto případě je matice  $C$  řádu  $2 \times 3$  a vektor  $v$  má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice  $C$  řádu  $2 \times 3$  s maticí odpovídající vektoru  $v$  řádu  $3 \times 1$ .

- (e) Je-li matice  $B$  řádu  $m \times n$  musí být matice  $C$  řádu  $n \times \ell$  a výsledná matice bude řádu  $m \times \ell$ . V tomto případě je matice  $B$  řádu  $2 \times 2$  a matice  $C$  řádu  $2 \times 3$  (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu  $2 \times 3$ . Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Cv. 3.2** Mějme  $A, b$  definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory  $x = (0, 1, 2)^T, y = (0, -1, 2)^T$  řešením soustavy  $Ax = b$ .

**Řešení:**

Násobením  $Ax$  dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Násobením  $Ay$  dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektor  $x$  tedy řešením soustavy není, zatímco vektor  $y$  ano.

**Cv. 3.3** Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic  $2 \times 2$ .

**Řešení:**

Toto je kreativní příklad. V zásadě skoro každé dvě netriviální matice splní zadání. Například:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 3.4** Dokažte pro  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  z definice:

- (a)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ,
- (b)  $A(B + C) = AB + AC$ ,

$$(c) (A + B)^T = A^T + B^T.$$

**Řešení:**

Rovnost  $X = Y$  dvojice matic  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  platí, pokud si jsou rovny všechny jejich prvky. Ve všech podúlohách proto otestujeme pro libovolnou dvojici indexů  $i, j$  rovnost  $X_{ij} = Y_{ij}$ .

(a) Z definice násobení skalárem a maticového násobení vyjádříme

- $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$ ,
- $((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\alpha A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^n \alpha A_{ik}B_{kj}$ ,
- $(A(\alpha B))_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(\alpha B)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}\alpha B_{kj}$ .

Z vlastností komutativity a distributivity reálných čísel vyplývá vzájemná rovnost všech tří výrazů.

(b) Z definice násobení vyjádříme

$$(A(B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

a

$$(AB + AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^n A_{ik}C_{kj}.$$

Roznásobením členů sumy v prvním výrazu a jejich přeuspořádáním můžeme rozdělit výraz na dvě sumy odpovídající druhému výrazu.

(c) Z definice transpozice a sčítání matic vyjádříme

$$((A + B)^T)_{ij} = (A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

a

$$(A^T + B^T)_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}.$$

**Cv. 3.5** Dokažte:

$$(a) (ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

$$(b) A^T A \text{ je symetrická matice pro každé } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

**Řešení:**

(a) Z přednášky víme, že  $(AB)^T = B^T A^T$ . Tuto vlastnost využijeme dvakrát a vyjádříme

$$((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

(b) Matice  $M$  je symetrická, pokud  $M^T = M$ . Ověříme tedy tuto vlastnost pro matici  $M = A^T A$ . Odvodíme  $M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M$ , což dokazuje požadovanou symetrii.

**Cv. 3.6** Buď  $A$  matice řádu  $10 \times 5$ ,  $B$  matice řádu  $5 \times 20$  a  $C$  matice řádu  $20 \times 1$ . Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin  $ABC$ ?

**Řešení:**

Na vynásobení dvou obecných matic  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$  je třeba  $m \cdot p$  skalárních součinů ve tvaru  $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik}Y_{kj}$ . V rámci každého je třeba provést  $n$  násobení (za každý člen sumy) a  $n-1$  součtů. Celkově tedy provedeme  $mp(2n-1)$  aritmetických operací. Při násobení v pořadí  $(AB)C$  nejprve vynásobíme  $AB$ , což stojí

$$10 \cdot 20 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 1800 \text{ operací.}$$

Matice  $AB$  má rozměr  $10 \times 20$ . Násobení  $(AB)C$  proto stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 390 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí  $(AB)C$  stojí 2190 aritmetických operací.

Oproti tomu, násobení  $BC$  stojí

$$5 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 195 \text{ operací}$$

a  $A(BC)$  stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 90 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí  $A(BC)$  stojí 285 aritmetických operací, což je podstatně méně, než v prvním případě.

Poučení: I když je násobení matic asociativní, a tudíž na uzavorkování nezáleží matematicky, tak na něm záleží výpočetně.

**Cv. 3.7** Pro  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  určete následující.

- (a)  $A(\alpha e_i)$
- (b)  $A(e_i + e_j)$
- (c)  $(\alpha e_i)^T A$
- (d)  $(e_j + e_j)^T A$
- (e)  $e_i^T A e_j$
- (f)  $x^T A y$

**Řešení:**

- (a) Z vlastnosti součinu můžeme upravit  $A(\alpha e_i) = \alpha(Ae_i)$ . Výraz  $A(\alpha e_i)$  tedy odpovídá  $\alpha$ -násobku  $i$ -tého sloupce  $A_{*i}$ . Pro  $\alpha = 1$  tak dostaneme známé tvrzení  $Ae_i = A_{*i}$ .
- (b) Opět nejprve upravíme  $A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j$ . Výraz  $A(e_i + e_j)$  tedy odpovídá součtu  $i$ -tého a  $j$ -tého sloupce  $A_{*i} + A_{*j}$ .
- (c) Z vlastnosti součinu můžeme upravit  $(\alpha e_i)^T A = \alpha(e_i^T A)$ . Výraz  $(\alpha e_i)^T A$  tedy odpovídá  $\alpha$ -násobku  $i$ -tého řádku  $A_{i*}$ . Pro  $\alpha = 1$  tak dostaneme známé tvrzení  $e_i^T A = A_{i*}$ .

- (d) Opět nejprve upravíme  $(e_j + e_j)^T A = e_j^T A + e_j^T A$ . Výraz  $(e_j + e_j)^T A$  tedy odpovídá součtu  $j$ -tého a  $j$ -tého řádku  $A_{j*} + A_{j*}$ .
- (e) Aplikací předchozích vztahu postupným násobením dostáváme  $(e_i^T A)e_j = A_{i*}e_j = A_{ij}$ . Výraz  $e_i A e_j$  tedy odpovídá výběru prvku  $a_{ij}$ .
- (f) Využijeme všech předchozích vztahů a faktu, že vektory  $x, y$  můžeme vyjádřit jako kombinace  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$  a  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$ . Poté

$$x^T A y = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m)^T A (y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n).$$

Z distributivity, asociativity a vztahu  $e_i^T A e_j$  postupně dostáváme

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i e_j)^T A (y_j e_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j e_i^T A e_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j A_{ij}.$$

**Cv. 3.8** Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

- (a) Vynásobení  $i$ -tého řádku skalárem  $\alpha \neq 0$  můžeme zapsat pomocí matice

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici  $(i, i)$  zaměníme 1 za  $\alpha$ . Násobením touto maticí **zleva** násobíme  $i$ -tý řádek konstantou  $\alpha$ .

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je libovolná matice a  $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek  $j \in \{1, \dots, m\}$  a sloupec  $k \in \{1, \dots, n\}$  matice  $E_i(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  platí:

$$\begin{aligned} (E_i(\alpha)A)_{jk} &= \sum_{\ell} (E_i(\alpha))_{j\ell} A_{\ell k} \\ &= (E_i(\alpha))_{jj} A_{jk} && ((E_i(\alpha))_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} A_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } (E_i(\alpha))_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že  $E_i(\alpha)A$  má všechny řádky kromě  $i$ -tého shodné s maticí  $A$  a  $i$ -tý řádek je vynásoben skalárem  $\alpha$ .

- (b) Přičtení  $\alpha$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku, kde  $i \neq j$ . Můžeme zapsat pomocí matice



$k \in \{1, \dots, m\}$  a sloupec  $h \in \{1, \dots, n\}$  matice  $E_{ij}A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  platí:

$$\begin{aligned} (E_{ij}A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij})_{k\ell} A_{\ell h} \\ &= \begin{cases} (E_{ij})_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ (E_{ij})_{ki} A_{ih} & \text{pro } k = j \\ (E_{ij})_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } (E_{ij})_{k\ell} = 0) \\ &= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{ih} & \text{pro } k = j \\ A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } (E_{ij})) \end{aligned}$$

Vidíme, že  $(E_{ij})A$  má všechny řádky kromě  $i$ -tého a  $j$ -tého shodné s maticí  $A$  a  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek jsou prohozeny.

**Cv. 3.9** Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice  $A$  zprava?

**Řešení:**

K odpovědi bychom mohli dojít několika způsoby. Jedna možnost by byla vynásobit postupně matici  $A$  maticemi elementárních řádkových úprav zprava a zanalyzovat výsledek. My však využijeme toho, že víme, co se děje při násobení maticemi elementárních řádkových úprav zleva a vlastností transpozice matic. Pokud je  $E$  jedna z matic úprav, dostáváme

$$(AE)^T = E^T A^T.$$

Na tento vztah se dá nahlížet tak, že sloupce  $AE$  odpovídají řádkům  $E^T A^T$ . Z definice matic elementárních řádkových úprav je snadné nahlédnout, jak vypadají jejich transpozice. Konkrétně

- $(E_i(\alpha))^T = E_i(\alpha)$ ,
- $(E_{ij}(\alpha))^T = E_{ji}(\alpha)$ ,
- $(E_{ij})^T = E_{ij}$ .

Zatímco pro první a třetí úpravu je transpozice rovna původní matici, pro přičtení  $\alpha$ -násobku  $j$ -tého řádku i  $i$ -tému se transpozicí změní na přičtení  $\alpha$ -násobku  $i$ -tého řádku k  $j$ -tému.

Vidíme tedy, že  $E^T A^T$  odpovídá provádění elementárních řádkových úprav na řádky matice  $A^T$ , které odpovídají sloupcům matice  $A$ . Kombinací všech těchto pozorování dostáváme následující závěr.

- (a) Sloupce  $AE_i(\alpha)$  odpovídají řádkům  $E_i(\alpha)A^T$ . Aplikací této úpravy zprava vynásobíme  $i$ -tý sloupec matice  $A$  skalárem  $\alpha$ .
- (b) Sloupce  $AE_{ij}(\alpha)$  odpovídají řádkům  $E_{ji}(\alpha)A^T$ . Aplikací této úpravy přičteme  $\alpha$ -násobek  $i$ -tého sloupce k  $j$ -tému sloupci matice  $A$ .
- (c) Sloupce  $AE_{ij}$  odpovídají řádkům  $E_{ij}A^T$ . Aplikací této úpravy zprava prohodíme  $i$ -tý a  $j$ -tý sloupec matice  $A$ .

**Cv. 3.10** Spočítejte hodnotu následujících matic.

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$

(b)  $A = ab^T$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

**Řešení:**

- (a) K výpočtu hodnoty je možné využít Gaussovu eliminaci. Vidíme, že druhý řádek je fakticky 3-násobek prvního. Proto po jednom kroku eliminace, kdy přičteme  $(-3)$ -násobek prvního řádku k druhému dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta je již v REF tvaru a její hodnota je 1.

- (b) Pro určení hodnoty matice je dobré si uvědomit, jak matice vypadá. Platí, že  $(ab^T)_{ij} = a_i b_j$ , explicitně

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & a_1 b^T & - \\ - & a_2 b^T & - \\ - & a_3 b^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_n b^T & - \end{pmatrix}.$$

Řádky matice  $ab^T$  jsou jen násobky vektoru  $b^T$ . Mohou tedy nastat pouze dvě situace. Pokud  $a = 0$  nebo  $b = 0$ , triviálně  $\text{rank}(ab^T) = 0$ . V opačném případě existuje aspoň jedno  $a_i \neq 0$  a všechny řádky matice jsou násobky  $i$ -tého řádku. Podobně jako v předchozí úloze je tedy  $\text{rank}(ab^T) = 1$ .