

## 2. Soustavy lineárních rovnic

**Cv. 2.1** Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

**Cv. 2.2** Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$(a) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

**Cv. 2.3** Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice  $3 \times 4$  (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice  $n \times n$ ?

**Cv. 2.4** Nechť matice  $A$  je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice  $A$  jsou také v REF a které už být nemusí.

**Cv. 2.5** Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

**Cv. 2.6** Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(a) (x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(b) (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

**Cv. 2.7** Najděte konkrétní matici  $A$  takovou, aby počet řešení soustavy  $(A | b)$  byl:

$$(a) \infty \text{ pro každé } b,$$

$$(b) 1 \text{ pro každé } b,$$

$$(c) 0 \text{ nebo } 1, \text{ v závislosti na } b,$$

$$(d) 0 \text{ nebo } \infty, \text{ v závislosti na } b.$$

**Cv. 2.8** Vyřešte soustavu lineárních rovnic  $n \times n$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

**Cv. 2.9** Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

**Cv. 2.10** Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy  $(A | b_i)$  pro  $i = 1, 2, 3$ . Navrhněte co nejefektivnější způsob!