2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

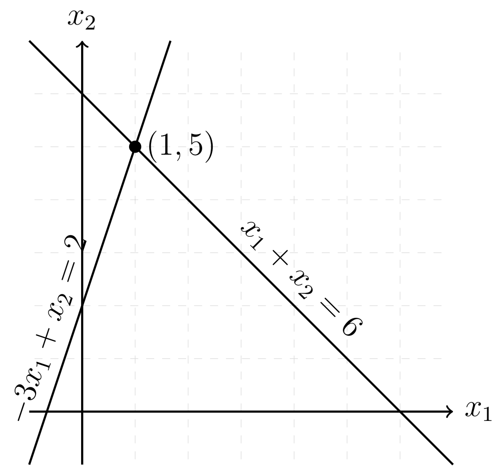
Řešení:

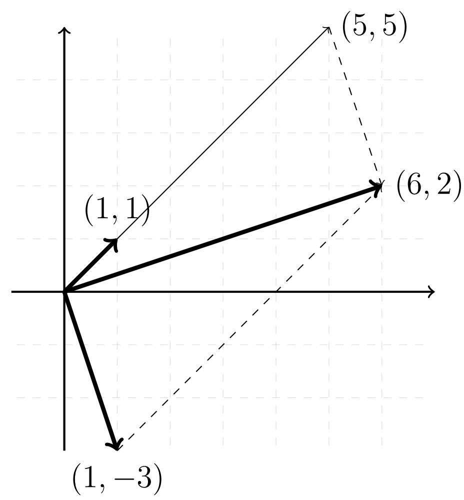
Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$





Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

Dosazením ověříme, že vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ opravdu vyhovuje soustavě (ale už neověříme, zda potenciálně neexistuje nějaké další řešení).

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$

Geometricky množina řešení tvoří přímku, která prochází bodem $(1, 3, 0)$ a má směrnici $(1, -2, 1)$.

V tomto případě opět platí $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid b) = 2$, ale zároveň je $\mathrm{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Dosazením například pro $x_3 = 0$ a $x_3 = 1$ ověříme, že vektory $(1, 3, 0)$ a $(2, 1, 1)$ vyhovují soustavě, a tím pádem jí vyhovují všechny na přímce (opět tím ale neověříme, zda neexistuje nějaké ještě jiné řešení).

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Řešení:

Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{\underline{}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \dots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, tj. celkem $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.

Cv. 2.4 Nechť matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

Řešení:

Z matice A můžeme odstranit libovolný řádek nebo více řádků a podmínky na REF tvar zůstanou zachovány, čili tato operace zachovává vlastnost být v odstupňovaném tvaru.

Libovolný sloupec vynechat nemůžeme, například odstraněním prvního sloupce z matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dostaneme matici, která v REF tvaru není. Můžeme ale odstranit jakékoli nebázické sloupce (tj. ty bez pivota) a také libovolné sloupce zprava.

Cv. 2.5 Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

Řešení:
Například vynásobení řádku nulou. Nebo odečtení řádku od sebe sama. Nebo odečtení naráz dvou řádků navzájem od sebe (čili děláme najednou dvě úpravy; každá z nich je v pořádku, ale musíme je vykonat postupně).

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$.
(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Toto je kreativní příklad, možných soustav $(A \mid b)$ je bezpočet a lze k nimi dospět různými úvahami.

(a) Protože je množinou řešení přímka, musíme sestavit alespoň 3 rovnice. Dále si uvědomíme, že mezi řešeními je nulový vektor (volbou $t := 0$), tudíž musí být pravá strana nulová, čili $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$. Protože řešení splňuje $x_3 = x_4 = 0$, třetí a čtvrtý sloupec matice A mohou obsahovat libovolné hodnoty. A konečně, protože $x_1 = -2x_2$, musí být první sloupec matice A polovinou druhého sloupce.
Hledanou soustavou tak může být například
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Analogicky jako v předchozím případě sestavíme matici A. Vektor b dopočítáme tak, aby $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4)$ bylo řešením rovnic. Můžeme vzít například
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.7 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

(a) ∞ pro každé b,

Řešení:
Například $A = (1\,1)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m < n$.

(b) 1 pro každé b,

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m = n$.

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = n \leq m$.

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) < \min\{m,n\}$.

Cv. 2.8 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

V zásadě aplikujeme standardní postup Gaussovy eliminace, i když u těchto typů příkladů je občas výhodnější k odstupňovanému tvaru matice dospět jinou sérií elementárních úprav.

Nejprve přičteme první řádek ke všem ostatním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Nyní druhý řádek přičteme ke všem, co se nachází pod ním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tento postup opakujeme, dokud nedospějeme k matici v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1} \end{array}\right).$$

Z pravé strany matice vyčteme řešení $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.

Tento příklad ilustruje ještě jednu vlastnost Gaussovy eliminace a obecně řešení soustav rovnic. Vstupní hodnoty jsou malá celá čísla, pouze 0, 1 a -1. Nicméně během úprav matice, stejně jako na výstupu jako řešení, jsme dostali některá čísla exponenciálně velká (konkrétně 2^{n-1}). S touto vlastností musíme počítat mj. při návrhu a implementaci numerických metod na řešení (potenciálně hodně velkých) soustav rovnic. Velká čísla nebo čísla velmi blízko nuly totiž zhoršují numerické vlastnosti řešení (zaokrouhlovací chyby během výpočtu mohou narůstat).

Cv. 2.9 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Hodnota v matici na pozici $(3,3)$ je $2 - a - a^2 = (1-a)(a+2)$ a v závislosti na hodnotě parametru a může být někdy nulová. Proto musíme provést následující rozbor případů:

- „Případ $a = -2$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 3$. V tomto případě řešení neexistuje.
- „Případ $a = 1$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 0$. Předchozí řádek je také nulový. Tudíž zbývá jediná rovnice, a to první, která má tvar $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. V tomto případě je množina řešení nekonečná a je tvaru

  $$(1 - x_2 - x_3,\, x_2,\, x_3), \quad \text{kde } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

- „Případ $a \notin \{-3, 1\}$." Nyní je hodnota v matici na pozici $(3,3)$ nenulová a jedná se o pivota. Zpětnou substitucí tedy dopočítáme jednoznačné řešení

  $$(x_1, x_2, x_3) = \left(\tfrac{1}{a+2}, \tfrac{1}{a+2}, \tfrac{1}{a+2}\right).$$

Cv. 2.10 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy $(A \mid b_i)$ pro $i = 1, 2, 3$. Navrhněte co nejefektivnější způsob!

Řešení:

Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením soustavy je tedy vektor $x = (2, 1, 1)$ pro pravou stranu b_1, vektor $x = (1, 0, 3)$ pro b_2 a vektor $x = (4, -1, -1)$ pro b_3.