Lineární algebra

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

October 11, 2022

O ČEM JE LINEÁRNÍ ALGEBRA 1?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- V reálném světě se řada problémů modeluje pomocí funkcí
  - $f(x) = 0$ (nalezení kořene funkce),
  - $\min c^T x, g(x) \leq 0$, (optimalizační úlohy)
  - $f'(t) = \frac{1}{2} f(t) t^2$. (diferenciální rovnice)
- Jak tyto problémy řešit?

- Obecně mohou být funkce příliš složité
- Proto aproximujeme pomocí polynomů
  $f(x) \implies P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$
- Taylorův polynom, Lagrangeův polynom, ...

- $ax^2 + bx + c = 0$ (polynom 2. řádu - kvadratický)

- $ax^2 + bx + c = 0$ (polynom 2. řádu - kvadratický)
  - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
  - $D = b^2 - 4ac$

- $ax^2 + bx + c = 0$ (polynom 2. řádu - kvadratický)
  - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
  - $D = b^2 - 4ac$
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (polynom 3. řádu - kubický)

- $ax^2 + bx + c = 0$ (polynom 2. řádu - kvadratický)
  - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
  - $D = b^2 - 4ac$
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (polynom 3. řádu - kubický)
  - $x = -\frac{p}{3u} + u - \frac{a}{3}$
  - $p = b - \frac{a^2}{3}$
  - $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$
  - $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (polynom 4. řádu - kvartický)

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (polynom 4. řádu - kvartický)
  - $x_i = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p \pm \frac{q}{S}}$
  - $p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}$
  - $q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2 d}{8a^3}$
  - $S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}(Q + \frac{\Delta_0}{Q})}$
  - $Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$
  - $\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae$
  - $\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2 e + 27ad^2 - 72ace$
  - $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ (polynom 5. řádu)

- $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ (polynom 5. řádu)
- $2x^5 - 10x + 5 = 0$ - **nelze vyřešit pomocí obecného vzorce!!!**

- $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ (polynom 5. řádu)
- $2x^5 - 10x + 5 = 0$ - **nelze vyřešit pomocí obecného vzorce!!!**
- Vede na Galois theory (Toerie grup - symetrie)

- Funkce modelující problém:
- $f(x)$

- Aproximace polynomem (Taylor, Lagrange, ...):
- $f(x) \implies P(x)$

- Aproximace lineární funkcí:
- $f(x) \implies P(x) \implies L(x)$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$
  - Co je zde řešení?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$
  - Co je zde řešení?
  - ∞ mnoho řešení

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$
  - Co je zde řešení?
  - ∞ mnoho řešení
- Kdy je řešení jednoznačné?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic

- $ax + b = 0$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$
  - Co je zde řešení?
  - ∞ mnoho řešení
- Kdy je řešení jednoznačné?
- $\implies$ soustava lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_n = 0$

resp.

Soustava lineárních rovnic

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2 = 0$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + c_n = 0$

resp.

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Maticová reprezentace soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, kde
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Jak se řeší?

Maticová reprezentace soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$ Jak se řeší?

1. graficky

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Maticová reprezentace soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$ Jak se řeší?

1. graficky
2. substituční metoda

Maticová reprezentace soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$ Jak se řeší?

1. graficky
2. substituční metoda
3. součtová metoda ($\implies$ **Gaussova eliminace**)
4. $\vdots$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Myšlenka součtové metody:

- $2x + 3y = 7$
- $-4x + y = 0$

Myšlenka součtové metody:

- $2x + 3y = 7$
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$ (přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$)
- $-4x + y = 0$

Myšlenka součtové metody:

- $2x + 3y = 7$
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$ (přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$)
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$
- $7y = 14$ (přičtení 1. rovnice k druhé)

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Myšlenka součtové metody:

- $2x + 3y = 7$
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$ (přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$)
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$
- $7y = 14$ (přičtení 1. rovnice k druhé)

- $7y = 14 \implies y = 2$ (vyřešení rovnice o jedné neznámé)

Myšlenka součtové metody:

- $2x + 3y = 7$
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$ (přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$)
- $-4x + y = 0$
- $4x + 6y = 14$
- $7y = 14$ (přičtení 1. rovnice k druhé)
- $2x + 3y = 7 \implies 2x + 6 = 7 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$ (substituce y do 1. rovnice)
- $7y = 14 \implies y = 2$ (vyřešení rovnice o jedné neznámé)

Myšlenka součtové metody (maticově):

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Myšlenka součtové metody (maticově):

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$
- Přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Myšlenka součtové metody (maticově):

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$
- Přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$
- Přičtení 1. rovnice k 2. rovnici
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$

Myšlenka součtové metody (maticově):

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \end{array} \right)$
- Přenásobení 1. rovnice $\alpha = 2$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ -4 & 1 & 0 \end{array} \right)$
- Přičtení 1. rovnice k 2. rovnici
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{array} \right)$
- Substituční krok
- $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{array} \right)$
- $y = 2, x = \frac{1}{2}$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Gaussova eliminace:

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$

Gaussova eliminace:

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$
- Vynulování prvního sloupce
- $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_n \end{array} \right)$

Gaussova eliminace:

- Převedení do odstupňovaného tvaru
- $$\left(\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \dots & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \dots & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$
- Zpětná substituce
- $x_n = \frac{b'_n}{a_{nn'}}, x_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a'_{n-1,n-1}}, \dots$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

- Gaussova eliminace:
- 1) $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \rightsquigarrow REF \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- REF = row echelon form - česky *odstupňovaný tvar matice*
- 2) zpětná substituce

Jaké mohou nastat případy?

Co myslíme *různými* rovnicemi?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)
- ∞ mnoho řešení (méně *různých* rovnic než proměnných)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)
- ∞ mnoho řešení (méně *různých* rovnic než proměnných)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

- Jedna rovnice může být násobkem jiné, nebo kombinací více jiných rovnic

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)
- ∞ mnoho řešení (méně *různých* rovnic než proměnných)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

- Jedna rovnice může být násobkem jiné, nebo kombinací více jiných rovnic
- $\implies$ během Gaussovy eliminace dojde k vynulování příslušného řádku matice

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)
- ∞ mnoho řešení (méně *různých* rovnic než proměnných)

Co myslíme *různými* rovnicemi?

- Jedna rovnice může být násobkem jiné, nebo kombinací více jiných rovnic
- $\implies$ během Gaussovy eliminace dojde k vynulování příslušného řádku matice
- $rank(A) :=$ počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru (*hodnost*/*rank* matice A)

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

V řeči Gaussovy eliminace?

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)

V řeči Gaussovy eliminace?

- $rank(A) = n$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)

V řeči Gaussovy eliminace?

- $rank(A) = n$
- $rank(A) < rank(A|b)$ $(0 = b_i)$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jaké mohou nastat případy?

- Jedno řešení (stejný počet proměnných a *různých* rovnic)
- Neexistuje řešení (více *různých* rovnic než proměnných)
- ∞ mnoho řešení (méně *různých* rovnic než proměnných)

V řeči Gaussovy eliminace?

- $rank(A) = n$
- $rank(A) < rank(A|b)$ ($0 = b_i$)
- $rank(A) < n$

Další metoda: **Gauss-Jordanova eliminace**

Další metoda: **Gauss-Jordanova eliminace**

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \rightsquigarrow RREF\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$

Další metoda: **Gauss-Jordanova eliminace**

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \rightsquigarrow RREF\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- RREF - reduced row echelon form
- česky: *redukovaný řádkový odstupňovaný tvar*

Další metoda: **Gauss-Jordanova eliminace**

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \rightsquigarrow RREF\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- RREF - reduced row echelon form
- česky: *redukovaný řádkový odstupňovaný tvar*
- $$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & & & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & 0 & 1 & & \dots & 0 & b'_3 \\ & \vdots & 0 & & \ddots & \vdots & b'_4 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & & b'_m \end{array}\right)$$

Další metoda: **Gauss-Jordanova eliminace**

- $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \rightsquigarrow RREF\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$
- RREF - reduced row echelon form
- česky: *redukovaný řádkový odstupňovaný tvar*
- $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & b'_4 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & b'_m \end{array}\right)$$
- Odpadá zpětná substituce: $x_n = b'_n$

1: Řešení problémů pomocí lineárních rovnic $Ax = b$

Jak vypadá množina řešení, pokud jich máme ∞ mnoho? (pro $Ax = 0$)

Jak vypadá množina řešení, pokud jich máme ∞ mnoho? (pro $Ax = 0$)

- $x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0$, potom i $A(\alpha x) = 0$

Jak vypadá množina řešení, pokud jich máme ∞ mnoho? (pro $Ax = 0$)

- $x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0$, potom i $A(\alpha x) = 0$
- $x, y \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, Ay = 0$, potom i $A(x + y) = 0$

Jak vypadá množina řešení, pokud jich máme ∞ mnoho? (pro $Ax = 0$)

- $x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0$, potom i $A(\alpha x) = 0$
- $x, y \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, Ay = 0$, potom i $A(x + y) = 0$
- $\implies$ vede na **Vektorové podprostory**

Jak vypadá množina řešení, pokud jich máme ∞ mnoho? (pro $Ax = 0$)

- $x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0$, potom i $A(\alpha x) = 0$
- $x, y \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, Ay = 0$, potom i $A(x + y) = 0$
- $\implies$ vede na **Vektorové podprostory**
- pro $Ax = b$ na tzv. **Afinní podprostory**

Trochu méně obecně:

- $\mathbb{R}^n$ (množina *n*-tic čísel tzv. **vektorů**)
- $\bigoplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (sčítání vektorů)
  - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
  - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- $: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (násobení vektorů)
  - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \alpha \in \mathbb{R}$
  - $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T$

1. $(\mathbb{R}^n, \bigoplus)$ je Abelova grupa - *chová se hezky*
2. $(\mathbb{R}^n, \bigotimes)$ je monoid - *trochu hůře, ale pořád hezky*
3. *distributivita* $\bigoplus$ a $\bigotimes$ - *můžeme operace rozumně kombinovat*

2: Vektorové podprostory $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ nad tělesem $\mathbb{R}$

Trochu méně obecně:

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (nosná množina)
- $\bigoplus : V \times V \to V$ (sčítání vektorů)
- $: \mathbb{R} \times V \to V$ (násobení vektorů)

1. $(V, \bigoplus)$ je Abelova grupa - *chová se hezky*
2. $(V, \bigotimes)$ je monoid - *trochu hůře, ale pořád hezky*
3. *distributivita* $\bigoplus$ a $\bigotimes$ - *můžeme operace rozumně kombinovat*

Práce s vektorovými podprostory $\equiv$ analytická geometrie na steroidech

Příklad práce s vektory:

- $x = (1, 2)^T \in \mathbb{R}^2, y = (3, 3)^T \in \mathbb{R}^2$
- $2(1, 2)^T + 4(3, 3)^T = (2, 4)^T + (12, 12)^T = (14, 16)^T$

Jak reprezentovat VP?

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ - vektorový podprostor reprezentující rovinu
- např. pomocí vektorů $(1,0)^T, (0,1)^T$, kde $(a,b) = a(1,0)^T + b(0,1)^T$

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *generující* $\rightarrow$ **lineární kombinace:** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *generující* $\rightarrow$ **lineární kombinace:** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$
- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **generuje** V, pokud pro každé $v \in V$ existují $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *generující* $\rightarrow$ **lineární kombinace:** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$
- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **generuje** V, pokud pro každé $v \in V$ existují $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$
- B je **množina generátorů** V

Lineární kombinace, generátory a obal

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *generující* $\rightarrow$ **lineární kombinace:** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$
- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **generuje** V, pokud pro každé $v \in V$ existují $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$
- B je **množina generátorů** V
- $span(B) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i |$ pro $\alpha_i \in \mathbb{R}\}$ - množina všech lineárních kombinací (**lineární obal**)

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *minimální*: **lineárně nezávislou**

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *minimální*: **lineárně nezávislou**
- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ je **lineárně nezávislá**, pokud neexistuje j :

$$b_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_i b_i$$

Lineární nezávislost, báze

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *minimální*: **lineárně nezávislou**
- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ je **lineárně nezávislá**, pokud neexistuje j :

$$b_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_i b_i$$

- alternativně: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \forall i$.

Pro obecný $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ hledáme množinu *generující* prostor V, která je *minimální*.

- *minimální*: **lineárně nezávislou**
- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ je **lineárně nezávislá**, pokud neexistuje j :

$$b_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_i b_i$$

- alternativně: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \forall i$.
- Kdyby to neplatilo $\rightarrow \exists j : \alpha_j \neq 0$ a $b_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} b_i$, tedy $b_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \beta_i b_i$, kde $\beta_i = \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}$.

Lineárně nezávislá množina **generující** prostor V se nazývá **báze** vektorového podprostoru V.

Pojďme se znovu podívat na $Ax = b$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Již víme, že reprezentuje soustavu lineární rovnic

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n$

Pokud se podíváme *očima* sloupců,

tedy $A_i := a_{*i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, dostáváme že $Ax = b$ odpovídá

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b,$$

neboli $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots A_nx_n = b$. Po úpravě
$b = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots x_nA_n = \sum_{i=1}^n x_iA_i$.
To je lineární kombinace vektorů A_i dávající vektor b!!!

Důsledek:

- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ je báze prostoru V
- Matice $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $V = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$ .. množina lineárních kombinací B

Co tedy znamená $Ax = b$?

2: Vektorové podprostory $(V, \bigoplus, \bigotimes)$ nad tělesem $\mathbb{R}$

Co tedy znamená $Ax = b$?

1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic

Co tedy znamená $Ax = b$?

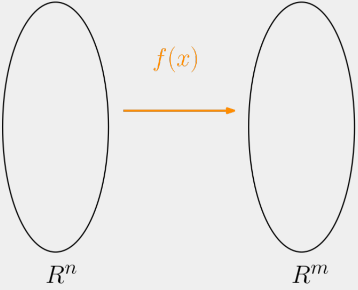
1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic
2. problém určení koeficientů lineární kombinace vektoru b vzhledem k bázi B (v sloupcích matice A),
   tj. urči $x_1, \ldots, x_n$, že $b = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$

Co tedy znamená $Ax = b$?

1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic
2. problém určení koeficientů lineární kombinace vektoru b vzhledem k bázi B (v sloupcích matice A),
   tj. urči $x_1, \ldots, x_n$, že $b = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$
3. Ještě jedna možná interpretace $\implies$ lineární zobrazení

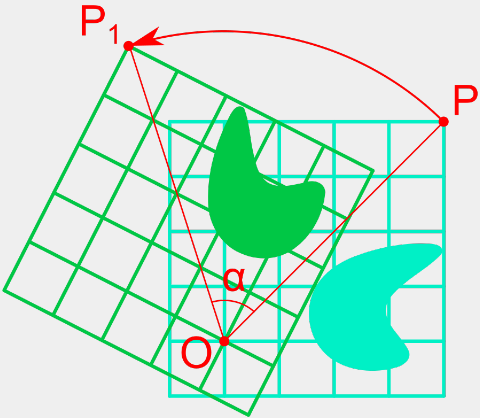
Lineární zobrazení $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení (funkce) s *hezkými* vlastnostmi, s kterým se *často* setkáváme.

- $f(x) + f(y) = f(x + y)$ (additivita)
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (homogenita)



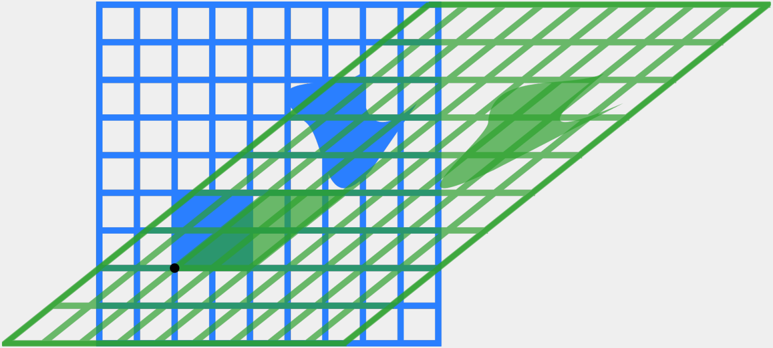
Příklady lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$:

- Rotace prostoru



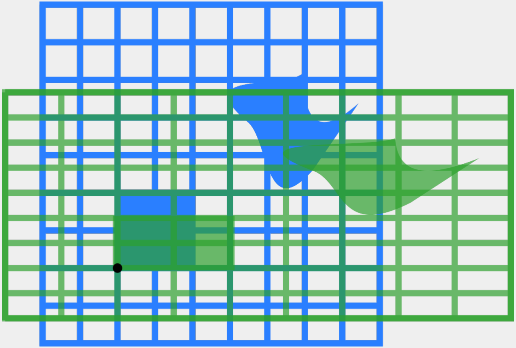
Příklady lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$:

- Zkosení



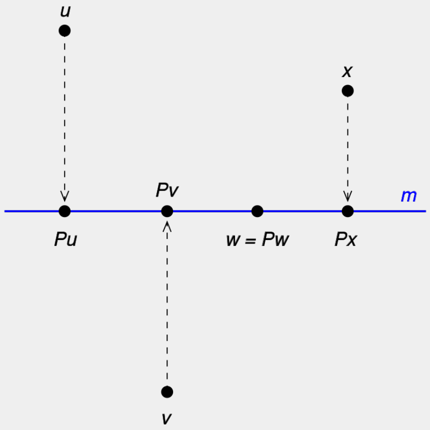
Příklady lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$:

- Škálování (podle různých os různé)



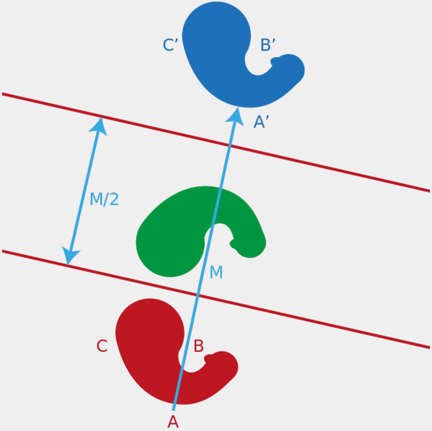
Příklady lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$:

- Projekce (na osu x)



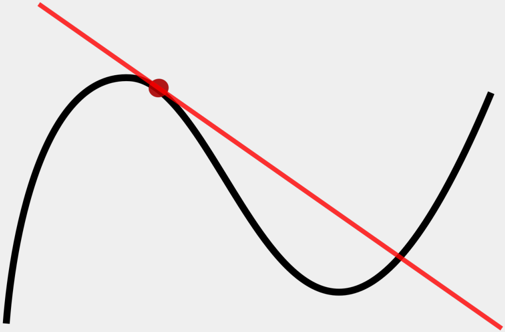
Příklady lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$:

- Zrcadlení



Exotičtější lineárního zobrazení:

- Derivace funkcí
- $f'(a) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(a+\Delta)-f(a)}{\Delta}$



Jak reprezentovat lineární zobrazení $f(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

- Buď $\mathbb{R}^2$ vektorový prostor a $B = \{e_1, e_2\}$ jeho *kanonická* báze.

Jak reprezentovat lineární zobrazení $f(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

- Buď $\mathbb{R}^2$ vektorový prostor a $B = \{e_1, e_2\}$ jeho *kanonická* báze.
- $f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2)$

Jak reprezentovat lineární zobrazení $f(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

- Buď $\mathbb{R}^2$ vektorový prostor a $B = \{e_1, e_2\}$ jeho *kanonická* báze.
- $f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2)$
- **Tedy můžeme reprezentovat lineární zobrazení pomocí obrazu bázických vektorů!!**

Jak reprezentovat lineární zobrazení $f(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

- Buď $\mathbb{R}^2$ vektorový prostor a $B = \{e_1, e_2\}$ jeho *kanonická* báze.
- $f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2)$
- **Tedy můžeme reprezentovat lineární zobrazení pomocí obrazu bázických vektorů!!**
- $f(x)$ odpovídá lineární kombinaci vektorů $f(e_1), f(e_2)$ s koeficienty α_1, α_2 takovými, že $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

Konkrétně

- $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

Konkrétně

- $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$
- $f(x)_1 = \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1$

Konkrétně

- $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$
- $f(x)_1 = \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1$
- $f(x)_2 = \alpha_1 f(a_1)_2 + \alpha_2 f(a_2)_2$

Konkrétně

- $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$
- $f(x)_1 = \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1$
- $f(x)_2 = \alpha_1 f(a_1)_2 + \alpha_2 f(a_2)_2$

$$\begin{pmatrix} f(x)_1 \\ f(x)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1 \\ \alpha_1 f(a_1)_2 + \alpha_2 f(a_2)_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(a_1)_1 & f(a_2)_1 \\ f(a_1)_2 & f(a_2)_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Konkrétně

- $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$
- $f(x)_1 = \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1$
- $f(x)_2 = \alpha_1 f(a_1)_2 + \alpha_2 f(a_2)_2$

$$\begin{pmatrix} f(x)_1 \\ f(x)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 f(a_1)_1 + \alpha_2 f(a_2)_1 \\ \alpha_1 f(a_1)_2 + \alpha_2 f(a_2)_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(a_1)_1 & f(a_2)_1 \\ f(a_1)_2 & f(a_2)_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- $f(x) = A\alpha$ - definice maticového násobení

Co tedy znamená $Ax = b$?

Co tedy znamená $Ax = b$?

1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic

Co tedy znamená $Ax = b$?

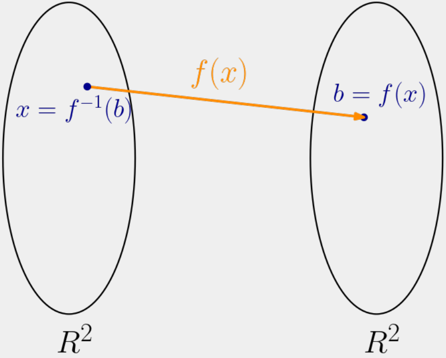
1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic
2. určení koeficientů lineární kombinace

Co tedy znamená $Ax = b$?

1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic
2. určení koeficientů lineární kombinace
3. $f(x) = Ax = b$ ... určení vzoru vektoru b při zobrazení $f(x)$

Co tedy znamená $Ax = b$?

1. reprezentuje soustavu lineárních rovnic
2. určení koeficientů lineární kombinace
3. $f(x) = Ax = b$ ... určení vzoru vektoru b při zobrazení $f(x)$



Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rovnoměrné škálování 2×2

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rovnoměrné škálování 2×2
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Škálování 2x ve směru osy x a -3x ve směru osy y

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Škálování 2x ve směru osy x a -3x ve směru osy y
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Projekce na osu y

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Projekce na osu y
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rotace o $\frac{\pi}{2}$ (90°) proti směru hodinových ručiček

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rotace o $\frac{\pi}{2}$ (90°) proti směru hodinových ručiček
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rotace o α proti směru hodinových ručiček

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Rotace o α proti směru hodinových ručiček
- $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle osy x

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle osy x
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α
- Rot_α... rotace o α

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α
- Rot_α... rotace o α
- R_x .. reflexe podle osy x

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α
- Rot_α... rotace o α
- R_x .. reflexe podle osy x
- $Rot_\alpha(R_x(Rot_{2\pi-\alpha}))$ ... reflexe podle přímky

Příklady výpočtu maticové reprezentace konkrétních zobrazení:

- Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α
- Rot_α... rotace o α
- R_x .. reflexe podle osy x
- $Rot_\alpha(R_x(Rot_{2\pi-\alpha}))$ ... reflexe podle přímky
- $BA = g(f(g))$ - maticové násobení odpovídá skládání zobrazení