Domácí úlohy z Lineární algebry 1

30. září 2024

Martin Černý, Matyáš Lorenc

Na zápočet bude třeba získat alespoň polovinu (120 z 240) bodů z následujících úloh. Řešení úloh odevzdávejte přes nástroj The Postal Owl (viz stránky cvičení) v jednom souboru ve formátu PDF. Několik dalších poznámek:

- Na úlohách je možné spolupracovat a používat všechny možné dostupné zdroje. Řešení úloh musí nicméně sepsat a odevzdat každý sám za sebe.
- Řešením úlohy není pouze výsledek, ale i řádně vysvětlený postup, jak jste k řešení došli, případně důkaz toho, co ve výsledku tvrdíte.
- Úlohy jsou rozděleny tematicky do sérií, které mají určené deadliny. Ty jsou ve dnech cvičení a časově odpovídají začátku cvičení. Po uplynutí deadlinu je možné za vyřešené úlohy získat polovinu bodů.
- V případě, že byste si nevěděli s domácími úkoly rady, nebo chtěli něco prodiskutovat, není problém se domluvit na konzultaci nebo si napsat přes e-mail.
- Pokud v zadání úlohy není výslovně požadován důkaz něčeho, co bylo na přednášce, či cvičení, je možné se při řešení úlohy na tento výsledek odkázat a není třeba ho již dokazovat.
- Naopak chcete-li použít ve svém řešení výsledek, který se neobjevil na přednášce, je třeba ho řádně zadefinovat a případně dokázat jeho platnost.

(1) Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace (25 bodů)

Deadline: 21. říjen 2024

1. **(3 body)** Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Gaussovy a Gauss-Jordanovy eliminace

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ 2y + 3z &= 0 \\ 2x - 2y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

.

2. **(6 bodů)** Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+3 & 2a+1 \\ 2a-1 & 2a+1 & a \end{array}\right).$$

3. **(6 bodů)** Mohou se při elementárních řádkových úpravách matice A objevit řádky r a s? Jak, případně proč ne?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \ r = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **(10 bodů)** Najděte matici soustavy 3 rovnic o 4 neznámých mající za řešení vektory

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; t, s \in \mathbb{R}.$$

(2) Maticové operace (40 bodů)

Deadline: 4. listopad 2024

1. **(3 body)** Dokažte z definice, že platí $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
2. **(3 body)** Dokažte, že $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
3. **(7 bodů)** Ukažte, že součin horních trojúhelníkových matic je zase horní trojúhelníková matice (A je horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i > j$).
4. **(7 bodů)** Najděte čtvercovou matici řádu n splňující $I - A = A^2$.
5. **(10 bodů)** Najděte matici $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takovou, aby pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platilo, že
   (a) $BA = 5A$,
   (b) $BA = 5B$,
   (c) všechny řádky BA jsou stejné jako první řádek A.
6. **(10 bodů)** Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *stochastická* (nebo též *markovská*), pokud její prvky leží v intervalu $[0, 1]$ a součet každého sloupce je 1. Dokažte, že součin stochastických matic je stochastická matice.

(3) Regulární matice a inverzní matice (34 bodů)

Deadline: 18. listopad 2024

1. **(7 bodů)** Nechť má matice A na diagonále lichá čísla a mimo diagonálu čísla sudá. Může být A singulární?
2. **(7 bodů)** Nechť má matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $n > 2$, na diagonále čísla $a \in \mathbb{R}$ a mimo diagonálu čísla $b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, pro která čísla a a b je matice A regulární.
3. **(7 bodů)** Zjistěte, pro která n je matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, pokud jsou její prvky definovány následovně:
   (a) $a_{ij} = i \cdot j$,
   (b) $a_{ij} = i + j$.
4. **(3 body)** Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí, že $(ABA^{-1})^n = (AB^nA^{-1})$.
5. **(3 body)** Najděte matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, která nemá žádný prvek nulový, splňující $A = A^{-1}$.
6. **(7 bodů)** Dokažte, že $trace(A) = trace(BAB^{-1})$, kde $trace(M)$ je součet diagonálních prvků matice M.

(4) Grupy a Permutace (23 bodů)

Deadline: 2. prosinec 2024

1. **(7 bodů)** Buď $\mathbb{IR}$ množina reálných uzavřených intervalů (t.j. $[a, b]$, takové že $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$) s operacemi
$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$
$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)]\,.$$
Vyšetřete algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +), (\mathbb{IR}, \cdot)$. (Tedy jaké z nám známých vlastností tyto struktury splňují a jaké naopak nesplňují? A patří tedy mezi grupy?)

2. **(3 body)** Buďte H_1, H_2 podgrupy grupy G. Ukažte, že také $H_1 \cap H_2$ je podgrupa grupy G.

3. **(10 bodů)** Řešte soustavy rovnic bez prohazování řádků:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{nad } \mathbb{Z}_3, \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{nad } \mathbb{Z}_2 \text{ a } \mathbb{Z}_5.$$

4. **(3 body)** Spočítejte v $\mathbb{Z}_7$ mocninu matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

(5) Vektorové prostory (30 bodů)

Deadline: 16. prosinec 2024

1. **(20 bodů)** Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:
   (a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
   (b) $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{C}$,
   (c) kladná reální čísla $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$,
   (d) množina všech rotací v prostoru $\mathbb{R}^n$, kde součet je definován jako složení rotací a α-násobek jako rotace o α-násobný úhel.
2. **(3 body)** Mějme U, V libovolné prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Může nastat, že $U \cap V = \emptyset$?
3. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda množina horních trojúhelníkových matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ – t.j. matic U takových, že $(U)_{ij} = 0$, pokud $i > j$ – tvoří vektorový prostor.

(6) Podprostory, lineární kombinace a nezávislost (41 bodů)

Deadline: 6. leden 2025

1. **(4 body)** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rozhodněte, zda $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$.
2. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:
   (a) $\left\{(s, s^2)^T : s \in \mathbb{R}\right\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$
   (b) $\left\{(s, t)^T \in \mathbb{R}^2 : |s| = |t|\right\}$
3. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda $U = V$ pro
$$U = span\left\{(1,2,0)^T, (0,1,-1)^T\right\}, V = span\left\{(2,1,3)^T, (-1,0-2)^T\right\}.$$
4. **(6 bodů)** Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M, tedy prostor všech možných podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako exkluzivní disjunkce (XOR) a násobky přirozeně – tedy $1 \odot x$ je x, $0 \odot x$ je nulový vektor.
   (a) Najděte nulový vektor.
   (b) Najděte $-v$ pro $v = \{a, b, c\}$.
   (c) Vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}, v = \{b, e\}, w = \{c, e\}, z = \{a, b, c\}$.
5. **(8 bodů)** Buďte u, v, w lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé následující množiny vektorů:
   (a) $u, v + w$
   (b) $0, u, v$
   (c) $u + v$,$u - v$,$u + w$,$u - w$
   (d) $u - v$,$2v + w$,$-u - v - 3w$
6. **(7 bodů)** Ukažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i$ jsou lineárně nezávislé.

(7) Báze, souřadnice, lineární zobrazení a matice přechodu (47 bodů)

Deadline: Konec akademického roku

1. **(3 body)** Najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi $x^2+1, x-2, 2x^2+x-1$.
2. **(10 bodů)** $B_1 = \left\{(1,1,1)^T, (1,0,2)^T, (3,-1,2)^T\right\}, B_2 = \left\{(2,2,1)^T, (1,0,0)^T, (-1,0,2)^T\right\}$ tvoří 2 různé báze $\mathbb{R}^3$. Zkonstruujte matici přechodu ${}_{B_2}[id]_{B_1}$ a nalezněte souřadnice $[x]_{B_1}$,$[x]_{B_2}$, pro obecné $x \in \mathbb{R}^3$ (tedy $[x]_{Kan} = (x_1, x_2, x_3)^T$).
3. **(7 bodů)** Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2, je-li
$$B_1 = \left\{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\right\},\ B_2 = \left\{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\right\}.$$
4. **(7 bodů)** Najděte matici lineárního zobrazení zobrazující:
   (a) $(1,3)^T$ na $(4,-1)^T$,
   (b) $(1,3)^T$ na $(1,1)^T$,a $(2,6)^T$ na $(-1,-1)^T$.
5. **(10 bodů)** Buď $f : U \to U$ lineární zobrazení.
   (a) Může v obecnosti bez dalších požadavků na f nastat, že ${}_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_4}[f]_{B_3}$ pro nějaké báze prostoru U B_1, B_2, B_3, B_4, takové že $B_1 \neq B_3$ a $B_2 \neq B_4$?
   (b) Ovlivní nějak předchozí otázku, pokud o f víme, že je isomorfismem?
6. **(10 bodů)** Určete ${}_{kan}[f \circ g]_{kan}$ pro lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná
$$f(a,b,c) = (a-c, b-a, b+c)^T,\ g(a,b,c) = (a+b+c, b+c, c)^T.$$