

14. Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem

- Cv. 14.1** Ukažte, že pro symetrické matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stejné hodnosti existuje $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taková, že $S^T A S = B$.
- Cv. 14.2** Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T A S$. Jaké vlastnosti má tato relace?
- Cv. 14.3** Zvolte si kvadratickou formu f na \mathbb{R}^4 se signaturou $(-2, 2, 0)$ a najděte podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^4$ dimenze 2 splňující $f(x) = 0 \forall x \in V$.
- Cv. 14.4** Buď $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma a $h : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ isomorfismus.
- Ukažte, že $f \circ h$ je kvadratická forma.
 - Ukažte, že obě kvadratické formy $f, f \circ h$ mají stejnou signaturu.
- Cv. 14.5** Uvažujme kvadratickou formu $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.
- Najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{(-2, 1, 1)^T, (3, 0, 1)^T, (0, 1, -2)^T\}$.
 - Najděte věrohodným způsobem vektor $x \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(x) < 0$.