13. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 13.1 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

K diagonalizaci kvadratické formy můžeme využít elementárních řádkových úprav. Jediné, co musíme zajistit je, že po aplikaci elementární řádkové úpravy aplikujeme odpovídající elementární sloupcovou úpravu.

U matice A nejprve prohodíme pořadí 1. a 2. řádku (a následně i sloupců),

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

V dalším kroku nejprve přičteme 1. řádek k 2. řádku (dále 1. sloupec k 2. sloupci), a stejně tak (-1)-násobek 1. řádku k 3. řádku (obdobně pro sloupce). Dostáváme,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme (-2)-násobek 2. řádku k 3. řádku a provedeme odpovídající operaci pro sloupce, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru. Podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti je matice A positivně semidefinitní, má dvě kladné a jedno nulové vlastní číslo.

U matice B nejprve prohodíme 1. řádek a 2. řádek (a obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní odečteme 1. řádek od 2. řádku (obdobně pro sloupce), a pak odečteme 1. řádek od 3. řádku (obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme 2. řádek k 3. řádku (obdobně pro sloupce), čímž získáme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru, která je podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti indefinitní – má jedno kladné, jedno nulové a jedno záporné vlastní číslo.

Pro matici C postupujeme analogicky. Problém nastane ve chvíli, když prohazujeme první dva řádky. Potom prohodíme první dva sloupce a opět dostaneme matici v původnim tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Musíme si tedy vypomoci trikem, který spočívá v tom, že provedeme nějakou jinou elementární operaci, která změní strukturu matice. Například přičteme k 1. řádku matice 2. řádek (obdobně pro sloupce) a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již postupujeme standardním způsobem a matici diagonalizujeme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice má tedy jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo, je indefinitní.

Cv. 13.2 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Řešení:

Pro kvadratickou formu určenou maticí A je polární báze určena sloupci matice S, kde $S^T AS = D$ a matice D je diagonální. Pro její výpočet tedy budeme postupovat stejně jako v předchozí podúloze, kde jsme matici diagonalizovali, jenom s tím rozdílem, že si budeme v průběhu výpočtu udržovat i součin matic sloupcových elementárních úprav, které na matici C aplikujeme.

Budeme tedy upravovat matici $(A \mid I_3)$, přičemž na matici vlevo aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy a na matici vpravo aplikujeme pouze sloupcové úpravy. V prvním kroku přičteme (-1)-násobek 1. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce), dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní přičteme $(-\frac{1}{2})$-násobek 2. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce),

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde bychom mohli skončit, ale z estetických důvodů provedeme ještě operaci vynásobení 3. řádku číslem 2 (totéž pro sloupce)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Polární báze je tedy tvořena sloupci matice napravo, tedy matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Můžeme pak snadno ověřit zkouškou, že platí

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = D.$$

Pro matici B postupujeme analogicky a dostaneme tvar:

$$(B \mid I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Matice B je tedy positivně definitní a polární báze je například $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(-2, -1, 2)^T$.

Cv. 13.3 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Víme, že existuje regulární matice R a diagonální matice D takové, že $R^T AR = D$. Protože R je regulární, existuje její inverze a můžeme vztah přepsat jako

$$A = (R^T)^{-1} DR^{-1} = (R^{-1})^T DR^{-1}.$$

Tudíž $f(x) = x^T Ax = (R^{-1}x)^T D(R^{-1}x)$ nám dá ono vyjádření kvadratické formy jako součtu čtverců lineárních forem.

V našem případě máme konkrétně

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostaneme požadovaný tvar

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 2(0.5x_3)^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 0.5x_3^2. \end{aligned}$$

Zkouškou (roznásobením výrazu) můžeme ověřit správnost výsledku.