11. Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 11.3 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní.

(a) Ukažte, že $A + B$ jsou také positivně definitní.

(b) Jak to bude se skalárním násobkem positivně definitní matice?

Cv. 11.4 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 11.5 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.6 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.7 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.8 Ukažte, že každá symetrická matice A se dá zapsat jako rozdíl dvou postivně definitních matic, tedy $A = P - R$, kde P, R jsou positivně definitní.