10. Ortogonální projekce a ortogonální doplněk

Ortogonální projekce

Cv. 10.1 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \text{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Najděte projekci vektoru $x = (3, -2, 5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2, 1, 1)^T$.

Řešení:

(a) *Na přednášce byla definivana ortogonální projekce vektoru $u \in U$ do podprostoru $V \Subset U$ se skalárním součinem a ortonormální bází $\mathcal{B}_V = (b_1, \ldots, b_n)$ jako $p_V(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i$.*
Přímka p má ortonormální bázi $\mathcal{B} = (\frac{y}{\|y\|})$. Takže bod x' odpovídá kolmé projekci x na přímku p, která se dá vyjádřit jako

$$x' = \left\langle x, \tfrac{y}{\|y\|} \right\rangle \tfrac{y}{\|y\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y.$$

(b) Platí

$$\|x'\| = \left\| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\| = \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right| \|y\| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|^2} \|y\| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|}.$$

Zároveň můžeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ přepsat do tvaru

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|} \leq \|x\|,$$

což dohromady dává $\|x'\| \leq \|x\|$. To znamená, že norma kolmé projekce je vždy shora omezena normou původního vektoru.

(c) V zásadě dosadíme do vzorečku pro projekci konkrétní hodnoty. Spočítáme

$$\langle x, y \rangle = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9, \quad \langle y, y \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6.$$

Projekce tedy odpovídá vektoru $\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y = \frac{3}{2} y = \frac{3}{2}(2, 1, 1)^T$.

Cv. 10.2 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Řešení:
Spočítáme projekci A' bodu A do roviny ρ a hledaná vzdálenost je potom vzdálenost A od A'.

Abychom postupovali podle standardního postupu, označme vektory

$$a = (5, 5, 3, 3)^T, \quad b = (0, 1, -1, 0)^T, \quad c = (4, -2, 2, -1)^T.$$

Pro vyjádření projekce potřebujeme ortonormální bázi roviny $\rho = \operatorname{span}\{b, c\}$. Budeme tedy postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory b, c:

$$\begin{aligned} z_1 &:= \tfrac{1}{\|b\|} b = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T, \\ y_2 &:= c - \langle c, z_1 \rangle z_1 = (4, -2, 2, -1)^T - (-2\sqrt{2})\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T = (4, 0, 0, -1)^T, \\ z_2 &:= \tfrac{1}{\|y_2\|} y_2 = \tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T \end{aligned}$$

a dostaneme ortonormální bázi z_1, z_2. Projekce a' vektoru a do roviny ρ má potom tvar

$$\begin{aligned} a' &= \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_1 \rangle z_1 \\ &= \sqrt{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T + \sqrt{17}\tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T \\ &= (4, 1, -1, -1)^T. \end{aligned}$$

Nakonec spočítáme požadovanou vzdálenost a od a' jako

$$\|a - a'\| = \|(5, 5, 3, 3)^T - (4, 1, -1, -1)^T\| = \|(1, 4, 4, 4)^T\| = 7.$$

Závěr: Vzdálenost bodu A od roviny obsahující o, B a C je 7.

Cv. 10.3 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:
Vzdálenost c od nadroviny $a^T x = 0$ se rovná vzdálenosti c od jeho projekce c_n na tuto nadrovinu, tedy normě vektoru $c - c_n$. Výpočet ale výrazně usnadníme, pokud si uvědomíme, že vektor $c_p = c - c_n$ je vlastně projekce vektoru c na přímku danou normálovým vektorem nadroviny, což je přímka $\operatorname{span}\{a\}$. Projekci na přímku $\operatorname{span}\{a\}$ umíme již vyjádřit jako

$$c_p = \frac{\langle c, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a = \frac{c^T a}{\|a\|^2} a.$$

Velikost tohoto vektoru je rovna hledané vzdálenosti

$$\|c_p\| = \left\| \frac{c^T a}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|^2} \|a\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|}.$$

Ortogonální doplněk

Cv. 10.4 Pro vektorový prostor V určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\}^\perp$.

Řešení:
Ortogonální doplněk prostoru V má z definice tvar

$$V^\perp := \{x \in V \;;\; \forall y \in V : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Žádný nenulový vektor není kolmý sám na sebe, protože podle definice skalárního součinu je $\langle x, x \rangle > 0$ pro libovolné $x \neq o$. To znamená, že $V^\perp$ obsahuje pouze nulový vektor, čili $V^\perp = \{o\}$.

Každý vektor je kolmý na nulový vektor, čili $\langle x, o \rangle = 0$. Proto $\{0\}^\perp = V$.

V posledním případě máme $\{\}^\perp = V$, protože na vektory $x \in V$ neklademe žádnou podmínku. Neexistuje totiž vektor v $\{\}$, na který by musel být x kolmý.

Cv. 10.5 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \mathrm{span}\{v, w\} = \mathrm{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Řešení:

Ortogonální doplněk vektoru u do podprostoru V je vektorový podprostor, který můžeme formálně vyjádřit jako

$$\{u\}^\perp = \{x \in V \ ; \ \langle u, x \rangle = 0\}.$$

Protože V má dimenzi 2 a u není nulový prostor, $\{u\}^\perp$ má dimenzi 1, lze tedy vyjádřit ve tvaru $\{u\}^\perp = \mathrm{span}\{y\}$, kde $y \in V$ a zároveň $y \perp u$. Protože u, y jsou nenulové ortogonální vektory, jsou zároveň lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi prostoru V. Z toho vyplývá, že stačí vzít vektor u, doplnit ho na bází V a následně provést Gram-Schmidtovu ortonormalizaci v pořadí, kdy zachováme směr vektoru u. Konkrétně, například vezměme u, v a proveďme ortonormalizaci. Dostáváme

$$y = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = (1, 2, 4, 0)^T - \frac{1}{5}(1, 0, 0, -2)^T = \frac{1}{5}(4, 10, 20, 2)^T.$$

Všimněme si, že vektor y nemusíme pro naše potřeby normovat, protože už v tuto chvíli jednoznačně určuje $\{u\}^\perp$.

Poznámka. Aby úloha byla dobře definovaná, musí platit $u \in V$. To můžeme ověřit standardním způsobem, kdy vektor u vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů v, w. V tomto případě můžeme ověření učinit také a posteriori tak, že vyjádříme vektor w pomocí vektorů u, y. Protože vektory u, y jsou ortogonální, stačí ověřit platnost Fourierova rozvoje

$$w = \frac{\langle w, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\langle w, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y.$$

Cv. 10.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Řešení:

Řádkový prostor matice $\mathcal{R}(A)$ je generovaný řádky matice A. Okamžitě vidíme, že řádky matice jsou na sobě lineárně závislé, proto můžeme řádkový prostor vyjádřit například jako $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{(1, 2)^T\}$.

Jádro matice $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ Ax = 0\}$ odpovídá množině řešení soustavy $Ax = 0$. Odstupňovaný tvar matice A je například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy množina řešení je přímka $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{(-2,1)^T\}$. V obrázku jsou znázorněny oba prostory $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ jako dvě na sebe kolmé přímky. Obrázek tedy ilustruje vlastnost, že tyto prostory jsou navzájem ortogonálními doplňky.