9. Gramova–Schmidtova ortonormalizace, ortogonální projekce

Cv. 9.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $v = (3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\ (0,0,1)^T\}$.

Řešení:
Standardní způsob výpočtu koeficientů lineární kombinace (tedy souřadnic vektoru v vůči dané bázi $\mathcal{B}$) vede na řešení soustavy lineárních rovnic

$$\alpha_1 \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T + \alpha_2 \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T + \alpha_3 (0,0,1)^T = (3,2,1)^T,$$

čili na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít Věty o Fourierových koeficientech, tedy toho, že lze koeficienty vyjádřit snadněji pomocí tzv. *Fourierových* koeficientů jako $v = \sum_{i=1}^n \langle v, z_i\rangle z_i$, kde $z_1, \dots, z_n$ je ortonormální báze.

Aplikací vzorce dostáváme hledané (Fourierovy) koeficienty:

- $\alpha_1 = \langle v, z_1\rangle = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T\rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_2 = \langle v, z_2\rangle = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_3 = \langle v, z_3\rangle = \langle (3,2,1)^T, (0,0,1)^T\rangle = 1$,

neboli $[v]_{\mathcal{B}} = (\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)^T$.

Cv. 9.2 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$, pomocí Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace:

(a) ortonormalizujte vektory v pořadí x_1, x_2,

(b) ortonormalizujte vektory v pořadí x_2, x_1.

Řešení:
Cílem úlohy je uvědomit si, že u Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace záleží na tom, v jakém pořadí vektory ortogonalizujeme. V obou případech dostaneme správnou ortonormální bázi prostoru $\operatorname{span}\{x_1, x_2\}$, ale pokaždé se ta báze bude skládat z různých vektorů.

(a) Ortogonalizace v pořadí x_1, x_2:

- normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{2}$ a odtud $z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.
- $y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1\rangle z_1$, kde $\langle x_2, z_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}$, proto $y_2 = (1,1,1)^T - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, tedy $y_2 = (0,0,1)^T$.
- normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 1$ a dostaneme $z_2 = y_2 = (0,0,1)^T$.

Hledaná ortonormální báze je tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,\ (0,0,1)^T$.

(b) Ortogonalizace v pořadí x_2, x_1 vede na dvojici vektorů

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \quad \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T.$$

Cv. 9.3 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortonormalizaci na řádky matice A, tedy na vektory $x_1 = (1,1,1,1)^T$, $x_2 = (4,1,4,1)^T$, $x_3 = (1,2,3,4)^T$.

Algoritmus Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace pracuje iterativně, kdy v každé iteraci nakolmí vektor na množinu již zortonormalizovaných vektorů. Konkrétně, v i-té iteraci nejprve odečte od vektoru x_i jeho kolmou projekci do prostoru $\operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$ již dříve ortonormalizovaných vektorů a dostaneme vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j$. Následně tento vektor normalizuje: $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace jsou:

- normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (4,1,4,1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.
- normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy
$$y_3 = (1,2,3,4)^T - 5(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T + 1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T = (-1,-1,1,1)^T.$$
- normalizujeme y_3: $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je ortonormální báze $B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Poznámka. Čtenář může dále ověřit, že vektory z_1, z_2, z_3 jsou skutečně na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. To poslouží i jako dílčí (a obvykle postačující) zkouška správnosti výsledku. Kdybychom chtěli mít skutečnou jistotu, že výsledek je správně, museli bychom ještě ukázat, že vektory z_1, z_2, z_3 generují prostor $\mathcal{R}(A)$. To lze prokázat například ověřením rovnosti z věty o Fourierových koeficientech, tedy rovnosti $x_k = \sum_{i=1}^{3} \langle x_k, z_i \rangle z_3$ pro $k = 1, 2, 3$.

Cv. 9.4 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení:

Abychom rozšířili bázi řádkového prostoru matice A na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$, můžeme například matici nejprve převést do odstupňovaného tvaru. Tím se dozvíme pozice nebázických sloupců, pro které přidáme odpovídající kanonické vektory. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, proto stačí přidat $x_4 = (0,0,0,1)^T$, čímž získáme rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Pokud aplikujeme Gramovu-Schmidtovu ortonormalizaci na původní řádky matice a vektor e_4 přidáme na konec, bude ortonormalizace pro první tři vektory probíhat stejně. Můžeme proto aplikovat Gramovu-Schmidtovu ortonormalizaci rovnou na vektory z_1, z_2, z_3, x_4, čímž získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Konkrétně stačí dopočítat pouze nakolmení a normování x_4:

- $\langle x_4, z_1\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2\rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3\rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž

$$\begin{aligned} y_4 &= (0,0,0,1)^T - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T \\ &= (\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})^T. \end{aligned}$$

- normalizujeme y_4: $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

Druhý způsob využívá faktu, že $\forall v \in \operatorname{Ker} A : v \perp y \ \forall y \in \mathcal{R}(A)$, tedy všechny vektory z jádra dané matice jsou kolmé na všechny vektory z řádkového prostoru této matice. Jádro snadno vypočítáme z odstupňovaného tvaru matice A, tedy dostáváme $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{(1,-1,-1,1)^T\}$. Nyní stačí vektor $v = (1,-1,-1,1)^T$ normalizovat a dostaneme hledaný vektor $z_4 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$.

Cv. 9.5 Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:
Množina řešení soustavy má tvar $\{(a-b,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $x_1 = (0,1,1)^T, x_2 = (1,1,0)^T$. Po znormalizování prvního vektoru dostaneme

$$z_1 = \frac{(0,1,1)^T}{\|(0,1,1)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T.$$

Po odečtení projekce $\big\langle x_2, z_1\big\rangle z_1$ od vektoru x_2 dostáváme

$$\begin{aligned} y_2 &= (1,1,0)^T - \Big\langle (1,1,0)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T\Big\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T \\ &= (1,1,0)^T - \tfrac{1}{2}(0,1,1)^T = (1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T. \end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $y_2 = \big(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\big)^T$. Ten má normu $\sqrt{3/2}$. Tedy druhý vektor ortonormální báze je

$$z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \big(1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\big)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^T.$$

Poznamenejme, že řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 9.6 Určete ortogonální projekci $p_{\mathcal{B}}(a)$ vektoru $a = (2,2,1,5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$\mathcal{B} = \big\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T\big\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p_{\mathcal{B}}(a)]_{\mathcal{B}}$ vzhledem k bázi B.

Řešení:

Protože B je ortonormální bází daného podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci, která říká, že

$$p_{\mathcal{B}}(a) = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i,$$

kde

$$z_1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, \quad z_2 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, \quad z_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T.$$

Spočítáme Fourierovy koeficienty

$$\langle a, z_1 \rangle = 5, \quad \langle a, z_2 \rangle = -2, \quad \langle a, z_3 \rangle = 1.$$

Hledaná projekce $p_{\mathcal{B}}(a)$ se určí jako

$$p_{\mathcal{B}}(a) = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i = 5z_1 - 2z_2 + 1z_3 = (1, 3, 2, 4)^T.$$

Dále víme, že souřadnice vektoru $p_{\mathcal{B}}(a)$ vzhledem k bázi $\mathcal{B} = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům, a tedy $[p_{\mathcal{B}}(a)]_B = (5, -2, 1)^T$.

Cv. 9.7 Pro skalární součin $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortonormalizujte vektory $x_1 = (1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1)^T$.

Řešení:

Důležité je uvědomit si, že postup Gramovy-Schmidtovy ortonormalizace se nijak nemění. Lišit se budu pouze výpočet skalárního součinu $\langle x, y \rangle$ a jím indukované normy $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

V prvním kroku normalizujeme vektor $(1, 0)^T$. Platí, že

$$\|(1, 0)^T\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0^2} = \sqrt{2},$$

proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)^T$. Dále

$$\langle x_2, z_1 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = \tfrac{3}{\sqrt{2}},$$

z čehož

$$y_2 = (1, 1)^T - \tfrac{3}{\sqrt{2}} \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 0)^T = (-\tfrac{1}{2}, 1)^T.$$

Protože

$$\|(-\tfrac{1}{2}, 1)^T\| = \sqrt{2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + 2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot 1 + 1 \cdot 1^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

má druhý vektor ortonormální báze hodnotu $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1}(-\frac{1}{2}, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 2)^T$.

Můžeme opět provést (dílčí) zkoušku a ověřit, že výsledné vektory z_1, z_2 jsou na sebe kolmé v příslušném skalárním součinu, tedy $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$.