

9. Gramova–Schmidtova ortonormalizace, ortogonální projekce

Cv. 9.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $v = (3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \right\}$.

Cv. 9.2 Bud' $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1, 1)^T$, pomocí Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace:

(a) ortonormalizujte vektory v pořadí x_1, x_2 ,

(b) ortonormalizujte vektory v pořadí x_2, x_1 .

Cv. 9.3 V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi \mathbb{R}^4 .

Cv. 9.5 Najděte ortonormální bázi podprostoru \mathbb{R}^3 popsáno rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 9.6 Určete ortogonální projekci $p_{\mathcal{B}}(a)$ vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p_{\mathcal{B}}(a)]_{\mathcal{B}}$ vzhledem k bázi B .

Cv. 9.7 Pro skalární součin $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortonormalizujte vektory $x_1 = (1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1)^T$.