8. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 8.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

  Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \text{ a zároveň } x_2 = 0.$$

  To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2).\end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Cv. 8.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \\ = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2+2^2+4^2+2^2} = 5.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x-y\| = \|(0,-1,-3,-1)^T\| = \sqrt{0^2+(-11)^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 8.3 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y}_i = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 = \\ = 1\cdot(1+i) + 3i\cdot 1 + (1+5i)\cdot 1 = 2+9i.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \overline{x}\rangle} = \sqrt{x^T \overline{x}} = \sqrt{1+3i(-3i)+(1+5i)(1-5i)} = 6,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \overline{y}\rangle} = \sqrt{y^T \overline{y}} = \sqrt{(1-i)(1+i)+1+1} = 2.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x-y\| = \|(i, -1+3i, 5i)^T\| = 6.$$

Cv. 8.4 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Řešení:
Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y, pokud $0 = \langle x, y\rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Báze je tvořena například vektory $(5, -1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy je podprostor dimenze $n - 1$.

Norma obecně

Cv. 8.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:
Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

$$x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 4x_2 = 0, \quad 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

  Tato soustava má jediné řešení, a to $x_1 = x_2 = 0$. Proto $\|x\| = 0$ nastane jen tehdy, když $x = (0, 0)^T$.

- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, neboť

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1 - 2\alpha x_2| + |3\alpha x_1 - 4\alpha x_2| + |5\alpha x_1 - 6\alpha x_2| \\ &= |\alpha| \cdot |x_1 - 2x_2| + |\alpha| \cdot |3x_1 - 4x_2| + |\alpha| \cdot |5x_1 - 6x_2| \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\leq |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 8.6 Jednotková kružnice v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je rovna jedné, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

(a) maximová norma (Čebyševova norma) $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) Eukleidovská norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

(c) součtová norma (Manhattanská norma) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

(d) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

Řešení:

(a) V maximové normě je jednotková kružnice popsaná rovnicí $\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$, což se dá ekvivalentně vyjádřit: $(|x_1| = 1 \wedge |x_2| \leq 1) \vee (|x_1| \leq 1 \wedge |x_2| = 1)$. To znamená, že $x_1 \in [-1, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$ a jednotková kružnice má tvar čtverce s vrcholy $(-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)$.

(b) V eukleidovské normě je jednotková kružnice normální kružnice o poloměru 1 se středem v počátku.

(c) V součtové normě je jednotková kružnice popsaná rovnicí $|x_1| + |x_2| = 1$. Nyní budeme postupovat analýzou postupně pro jednotlivé kvadranty. V prvním kvadrantu má rovnice tvar $x_1 + x_2 = 1$, čili část jednotkové kružnice v tomto kvadrantu tvoří přímka s vrcholy $(1, 0), (0, 1)$. Ve čtvrtém kvadrantu (nezáporná první složka, nekladná druhá složka) má rovnice tvar $x_1 - x_= 1$ a část jednotkové kružnice v tomto kvadrantu tvoří přímka s vrcholy $(1, 0), (0, -1)$. Analogicky postupujeme dále a nakonec dostaneme čtverec s vrcholy $(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1)$.

(d) V této normě je jednotková kružnice popsaná nerovnicí

$$\max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\} = 1,$$

což se dá ekvivalentně vyjádřit jako následující podmínky:

$$\begin{array}{rl} & (|x_1| \leq 1 \wedge |x_2| \leq 1 \wedge |x_1 - x_2| = 1) \\ \vee & (|x_1| \leq 1 \wedge |x_2| = 1 \wedge |x_1 - x_2| \leq 1) \\ \vee & (|x_1| = 1 \wedge |x_2| \leq 1 \wedge |x_1 - x_2| \leq 1) \end{array}$$

Jednotková kružnice v této normě tedy odpovídá šestiúhelníku s vrcholy $(0, 1), (1, 1), (1, 0), (-1, 0), (-1, -1), (-1, 0)$.

Cv. 8.7 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:
Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$