8. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 8.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Cv. 8.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1, 1, 1, 1)^T$ a $y = (1, 2, 4, 2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 8.3 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$ a $y = (1 - i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 8.4 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Norma obecně

Cv. 8.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.6 Jednotková kružnice v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je rovna jedné, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

(a) maximová norma (Čebyšeova norma) $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) Eukleidovská norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

(c) součtová norma (Manhattanská norma) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

(d) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

Cv. 8.7 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.