7. Diagonalizovatelnost symetrických a hermitovských matic

Cv. 7.1 Ověřte, že následující matice jsou ortogonální, resp. unitární:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Stačí ověřit, že pro danou reálnou čtvercovou matici A platí, že $AA^\top = I$, z čehož už vyplývá matice A je ortogonální.
Podobně pro komplexní čtvercovou matici B stačí ověřit, zda $BB^H = I$:

$$BB^H = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1-2i & 1-i \\ 1+i & -2i-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2-5i^2 & 0 \\ 0 & 2-5i^2 \end{pmatrix} = I.$$

Cv. 7.2 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení:
Pro symetrické matice víme z přednášky, že spektrální rozklad existuje. Protože matice $Q\Lambda Q^T$ je symetrická, takovýto rozklad pro nesymetrické matice nemůže nastat.

Cv. 7.3 Najděte spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Vlastní čísla matice A jsou 3 a 0 (dvojnásobné). K vlastnímu číslu 3 přísluší vlastní vektor $v_1 = (1, 1, 1)^T$. K vlastnímu číslu 0 přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory z množiny $Ker(A - 0I)$, tedy například $v_2 = (1, -1, 0)^T$. Jelikož vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé, bude i druhý vlastní vektor odpovídající číslu 0 kolmý na vlastní vektor odpovídající číslu 3.
Jelikož chceme, aby matice Q byla ortogonální, tedy $Q^TQ = I$, musí platit

$$(Q^TQ)_{ij} = (Q^T)_{i*}Q_{*j} = (Q_{*i})^TQ_{*j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Neboli, sloupcové vektory matice Q musí být na sebe navzájem kolmé a jejich velikost musí být rovna jedné. Pokud si zvolíme třetí vlastní vektor v_3 jako vektorový součin vektorů v_1 a v_2, bude automaticky platit, že $v_3 \perp v_1$ a $v_2 \perp v_1$. Zvolme tedy $v_3 = v_1 \times v_2 = (1, 1, -2)^T$.

Nyní musíme ještě vydělit nalezené vlastní vektory jejich velikostí, aby sloupcové vektory matice Q měli velikost jedna. Velikost $v_1 = \sqrt{v_1^T v_1} = \sqrt{3}$, $v_2 = \sqrt{v_2^T v_2} = \sqrt{2}$, $v_1 = \sqrt{v_1^T v_1} = \sqrt{6}$. Hledaný spektrální rozklad má tedy podobu $A = Q\Lambda Q^T$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1, 2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Řešení:

Protože je matice symetrická, druhý vlastní vektor musí být kolmý na první. Až na násobek máme jednoznačný kolmý vektor. Druhý vlastní vektor je tedy vektor $(2, -1)^T$.

Cv. 7.5 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

Řešení:

(a) Buďte λ, μ, $\lambda \neq \mu$, vlastní čísla a u, v odpovídající vlastní vektory symetrické matice A. Pak platí $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$. To ale implikuje

$$\lambda v^T u = v^T(\lambda u) = v^T A u = (v^T A u)^T = u^T A^T v = u^T A v = u^T(\mu v) = \mu u^T v.$$

Protože $\lambda \neq \mu$, musí $u^T v = 0$.

(b) Pokud má A různá vlastní čísla, je diagonalizovatelná. Můžeme tedy psát $A = Q\Lambda Q^{-1}$, kde Λ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a regulární matice Q má odpovídající vlastní vektory ve sloupcích. Protože podle předchozího bodu jsou vlastní vektory na sebe kolmé a lze je volit s normou 1, je Q ortogonální.