7. Diagonalizovatelnost symetrických a hermitovských matic

Cv. 7.1 Ověřte, že následující matice jsou ortogonální, resp. unitární:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.2 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 7.3 Najděte spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1,2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Cv. 7.5 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.