6. Vlastní čísla – Jordanova normální forma

Cv. 6.1 Najděte

(a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),

(b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Řešení:

(a) Matice musí mít Jordanovu normální formu ve tvaru jediné Jordanovy buňky velikosti 3. Můžeme tedy volit přímo Jordanovu buňku

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je libovolné číslo.

(b) Vyjdeme z předchozího příkladu a zvolíme například matici

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor této matice je jediný, ale je to vektor $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Pokud chceme změnit vlastní vektor, ale zachovat vlastní čísla a jejich algebraické a geometrické násobnosti, můžeme využít podobnosti a uvažovat matici ve tvaru $A = S^{-1}J_3(0)S$. Aby byl vektor v vlastním vektorem a číslo λ vlastním číslem matice A, musí platit $Av = \lambda v$, čili $S^{-1}J_3(0)Sv = \lambda v$. Přenásobením maticí S zleva dostaneme $J_3(0)Sv = \lambda Sv$. Tudíž vektor Sv je vlastním vektorem matice $J_3(0)$, což znamená $Sv = e_1$. Hledáme tedy regulární matici S takovou, aby platilo

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takovým matic existuje mnoho, zvolíme například

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice potom je $A = S^{-1}J_3(0)S$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme pak ověřit, že tato matice splňuje zadání: Matice A má jediné vlastní číslo 0, které je trojnásobné a přísluší mu jediný vlastní vektor v.

Cv. 6.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Řešení:
Počet všech Jordanových buněk odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ, tedy hodnotě $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$. V našem případě $n - \operatorname{rank}(A - 8I_n) = 16 - 9 = 7$. Tedy vlastní číslo 8 je v sedmi Jordanových buňkách.

Cv. 6.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A je trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobné) a $\lambda_1 = 2$ (jednonásobné). Vlastní číslo λ_2 leží v jedné Jordanově buňce velikosti 1, ale λ_1 může ležet v jedné nebo dvou Jordanových buňkách. Spočítáme proto $\operatorname{rank}(A - \lambda_1 I_3) = 1$, což říká, že geometrická násobnost λ_1 je dva, čili přísluší mu dva vlastní vektory. Hledaná Jordanova normální forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B má také dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a jednonásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 2$. Protože $\operatorname{rank}(B - \lambda_1 I_3) = 2$, přísluší k vlastnímu číslo λ_1 pouze jeden vlastní vektor a tudíž λ_1 leží v Jordanově buňce velikosti 2. Jordanova normální forma matice B je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice C má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 3$. Protože $\operatorname{rank}(C - \lambda_1 I_3) = 2$ a $\operatorname{rank}(C - \lambda_2 I_3) = 3$, vlastní číslo λ_1 leží ve dvou buňkách, kdežto λ_2 leží v jedné buňce. Jordanova normální forma matice C je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Řešení:

(a) Každá matice je podobná matici v Jordanově normální formě, která je jednoznačná až na pořadí buněk na diagonále. Stačí tedy spočítat, kolik je různých tvarů matic v Jordanově normální formě. Pokud je vlastní číslo 7

- čtyřnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_1(7), J_1(7), J_1(7), J_1(7)$;
- trojnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_2(7), J_1(7), J_1(7)$;
- dvojnásobné, pak existují dvě možnosti s buňkami $J_2(7), J_2(7)$ nebo $J_1(7), J_3(7)$;
- jednonásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_4(7)$.

Souhrnem máme 5 tříd ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Provedeme obdobný rozbor:

- Matice má vlastní číslo 5 dvojnásobné a vlastní číslo 7 jednonásobné. Pak Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(5), J_1(7)$ nebo z buněk $J_2(5), J_1(7)$.
- Matice má vlastní číslo 5 jednonásobné a vlastní číslo 7 dvojnásobné. To je opačná situace k předchozí. Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(7), J_1(7)$ nebo z buněk $J_1(5), J_2(7)$.

Jiná situace než ty výše zmíněné nastat nemůže, protože každé vlastní číslo musí mít násobnost aspoň 1. Dostali jsme dohromady 4 třídy ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.5 Převeďte matici A na Jordanův normální tvar, tedy najděte regulární matici R a matici J v Jordanově normální formě tak, aby $A = RJR^{-1}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$ s algebraickou násobností 4, jeho geometrická násobnost je rovna $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 4 - \operatorname{rank}(A - 2I) = 2$. Vlastní vektory jsou nenulová řešení homogenní soustavy rovnic $(A - 2I|\mathbf{0})$, dostáváme tedy dva LN vlastní vektory, například $v_1 = (0,0,1,0)^\top$ a $v_2 = (1,0,0,0)^\top$.
Pro sestavení matice potřebujeme najít tedy ještě dva zobecněné vlastní vektory. Budeme tedy hledat řetězec/řetězce zobecněných vlastních vektorů $\{x_m, \ldots, x_1\}$ pro které platí $(A - 2I)x_{j+1} = x_j$.

Zvolíme si $x_1 := v_1$ a hledáme zobecněný vlastní vektor x_2 jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

která však nemá řešení, vektor v_1 tvoří tedy pouze jednočlenný řetězec zobecněných vlastních vektorů (obyčejné vlastní vektory jsou zobecněnými vektory řádu 1). Z toho odvodíme, že vlastnímu vektoru v_1 bude odpovídat Jordanova buňka velikosti 1.
Je nyní zřejmé, že bude existovat řetězec zobecněných vlastních vektorů $\{x_3, x_2, x_1\}$, kde $x_1 = v_2$. Zobecněný vlastní vektor x_2 je řešením soustavy $(A - 2I|x_1)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

dostáváme tedy $x_2 = (p, 1, q, 0)^\top$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ jsou volné proměnné, které zatím nebudeme určovat. Zobecněný vlastní vektor x_3 najdeme jako řešení soustavy $(A - 2I|x_2)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odtud vidíme, že $q = -1$ a $x_3 = (s, p+1, r, -\frac{1}{2})^\top$, kde $r, s \in \mathbb{R}$ jsou také volné proměnné, které si však nyní již můžeme zvolit. Zvolíme si tedy $r = s = p = 0$ a dostáváme $x_2 = (0, 1, -1, 0)^\top$, $x_3 = (0, 1, 0, -\frac{1}{2})^\top$.

Můžeme nyní sestavit regulární matici $R = (v_1\ v_2\ x_2\ x_3)$. Hledané matice jsou:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cv. 6.6 Převeďte matici A na Jordanův normální tvar, tedy najděte regulární matici R a matici J v Jordanově normální formě tak, aby $A = RJR^{-1}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$. Vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ má tedy algebraickou i geometrickou násobnost rovnu jedné, odpovídají vlastní vektor je $v_1 = (2, -1, 1)^\top$. Vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ má algebraickou násobnost dva, ale

geometrická násobnost je rovna $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = 1$, má tedy jediný příslušný vlastní vektor $v_2 = (1, 0, 1)^\top$.

Pro sestavení matice potřebujeme najít ještě jeden zobecněný vlastní vektor x_2 jako řešení soustavy $(A - 2I)x_2 = x_1$, kde $x_1 := v_2$. Řešením této soustavy je vektor $x_2 = (z - 1, 0, z), z \in \mathbb{R}$, zvolíme tedy například $z = 1$, odkud $x_2 = (0, 0, 1)$. Hledané matice jsou:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$