5. Vlastní čísla a vlastní vektory, spektrální rozklad

Vlastní čísla a vlastní vektory

Cv. 5.1 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice A^2,

(b) matice αA,

(c) matice $A + \alpha I_n$,

(d) matice A^{-1},

(e) matice A^T.

Řešení:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Jak se bude chovat x_i při přenásobení A^2? Dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i (A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

Vlastní číslo λ_i se umocní na druhou a vlastní vektor x_i zůstane stejný.

Matice A^2 má tedy vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$.

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $\alpha A x_i$. Dostáváme

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i,$$

Matice αA má vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$.

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $(A + \alpha I_n)x_i$. Dostáváme

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

Matice $(A + \alpha I_n)$ má vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$.

(d) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Vynásobíme obě strany maticí $\frac{1}{\lambda_i}A^{-1}$ a dostaneme

$$\frac{1}{\lambda_i}A^{-1}Ax_i = \frac{1}{\lambda_i}A^{-1}\lambda_i x_i, \text{ odtud po úpravě } \frac{1}{\lambda_i}x_i = A^{-1}x_i,$$

tedy matice A^{-1} má vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

(e) Postup z předchozích podúloh zde nelze přímo aplikovat, musíme využít něčeho jiného. Můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 5.2 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Řešení:
Využijeme charakterizace, že matice je regulární právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla nenulová. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou ta vlastní čísla matice A, která jsou reálná (ta ryze komplexní můžeme ignorovat). Ze cvičení 5.1(c) víme, že se vlastní čísla matice $(A+\beta I_n)$ rovnají $\lambda_1+\beta \geq \cdots \geq \lambda_n+\beta$. Protože chceme regularitu pro všechny $\beta > \alpha$, musí dokonce platit nezápornost vlastních čísel, $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta \geq 0$. V opačném případě, kdy máme nějaké vlastní číslo $\lambda_i + \beta$ záporné snadno najdeme $\beta' > \beta$ takové, že jemu odpovídající vlastní číslo $\lambda_i + \beta'$ bude nulové, a matice $A + \beta' I_n$ bude singulární.

Hodnotu α tedy zvolíme tak, že $\lambda_1 + \alpha \geq \cdots \geq \lambda_n + \alpha = 0$, z čehož odvodíme, že $\alpha = -\lambda_n$.

Cv. 5.3 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Řešení:
Označme vlastní čísla A jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_m$. Obdobně pro matici B, mějme vlastní čísla $\mu_1, \ldots, \mu_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $y_1, \ldots, y_n$. Pro jednoduchost zde předpokládáme, že existuje plný počet vlastních vektorů. Označme $Mz = \nu z$ jako vlastní číslo ν a vlastní vektor z matice M. Můžeme blokově rozepsat

$$Mz = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_1 \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplývá, že $Az_1 = \nu z_1$ a $Bz_2 = \nu z_2$. Vidíme, že podvektory z_1, z_2 mají stejné vlastnosti, jako vlastní vektory A a B s tím rozdílem, že nepožadujeme nenulovost obou z nich zároveň (pouze nenulovost celého z). V závislosti na nulovosti složek z_1, z_2 rozlišíme několik případů:

(a) Pokud $z_1 = o$, musí $z_2 \neq o$ (z je vlastní vektor). Dostáváme
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix}.$$
Vidíme, že každý vektor $(o, y_i)^T$ je vlastním vektorem M s odpovídajícím vlastním číslem μ_i.

(b) Pokud $z_2 = o$, musí $z_1 \neq o$. Vidíme, že situace je obdobná jako v předchozím případě a proto platí, že vektor $(x_i, o)^T$ je vlastní vektor M odpovídající vlastnímu číslo λ_i.

(c) Případ, kdy $z_1 = o$ a $z_2 = o$ nemůže nastat, protože požadujeme nenulovost vlastního vektoru z.

(d) Pokud $z_1 \neq o$, $z_2 \neq o$, poté z_1 a z_2 odpovídají vlastním vektorům A a B. Pro ty musí platit, že jim odpovídá stejné vlastní číslo ν. Tedy pokud existuje $\lambda_i = \mu_j$, potom $z = (x_i, y_j)^T$ je vlastním vektorem M a $\lambda_i = \mu_j$ je jeho odpovídající vlastní číslo. Všimněme si nicméně, že v takovém případě je vektor $z = (x_i, 0)^T + (0, y_j)^T$ lineární kombinací již nalezených vlastních vektorů.

Vlastní čísla matice M tedy jsou
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$$
a příslušné vlastní vektory
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ o \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} o \\ y_n \end{pmatrix}.$$
Povšimněme si, že vlastní vektory tvaru $(x_i, 0)^T$ a $(0, y_j)^T$ jsou nenulové a lineárně nezávislé (protože $x_1, \ldots, x_m$ byly lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ také).

Spektrální rozklad

Cv. 5.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Řešení:
Spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory dané matice. Pokud je vlastních vektorů plný počet, tj. je jich n lineárně nezávislých, sestrojíme samotný rozklad SDS^{-1} tak, že diagonálu D budou tvořit vlastní čísla matice a sloupce matice S budou tvořit vlastní vektory matice.

(a) Charakteristický polynom matice je $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $2, 1, 4$. Těm odpovídají vlastní vektory $(1, 2, 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro výpočet můžeme využít vztahu matice A a A^T. Pokud $A = SDS^{-1}$, potom

$$A^T = (SDS^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^{-1})^T D S^T.$$

Po dosazení z předchozí podúlohy dostáváme rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Charakteristický polynom matice je $(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $4, 2, 1$. Těm odpovídají vl. vektory $(0, 1, 1)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(2, 1, 0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.5 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Řešení:
Cayleho-Hamiltonova věta říká, že pokud pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ máme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, poté

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Pro diagonalizovatelné matice platí, že existuje regulární S taková, že $A = SDS^{-1}$, kde D je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Dosaďme do levé strany rovnice

$$(-1)^n(SDS^{-1})^n + a_{n-1}(SDS^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Dále, protože $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$, můžeme výraz upravit na

$$(-1)^n SD^nS^{-1} + a_{n-1}SD^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Vytkněme z výrazu matici S zleva a matici S^{-1} zprava, dostáváme

$$S((-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n)S^{-1}.$$

Matice $M := (-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n$ má složky

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \cdots + a_1 0 + a_0 0 = 0 & \text{pro } i \neq j, \\ (-1)^n \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = p_A(\lambda_i) = 0 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Matice M je tedy nulová. Dostáváme proto

$$p_A(A) = SMS^{-1} = S0S^{-1} = 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.